

Lösung

1 Eine Röhre (prinzipieller Aufbau siehe Abbildung 1) mit einer Glühwendel, einem Gitter und einer Metallelektrode enthält Neon-Gas und einen Tropfen Quecksilber.
Die Beschleunigungsspannung U_B ist variabel, die Gegenspannung hat den festen Wert $U_G=1,5V$.

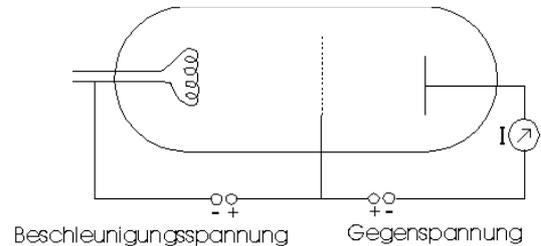


Abbildung 1

Die Messkurve (Abbildung 2) zeigt den Auffängerstrom I in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung U_B .

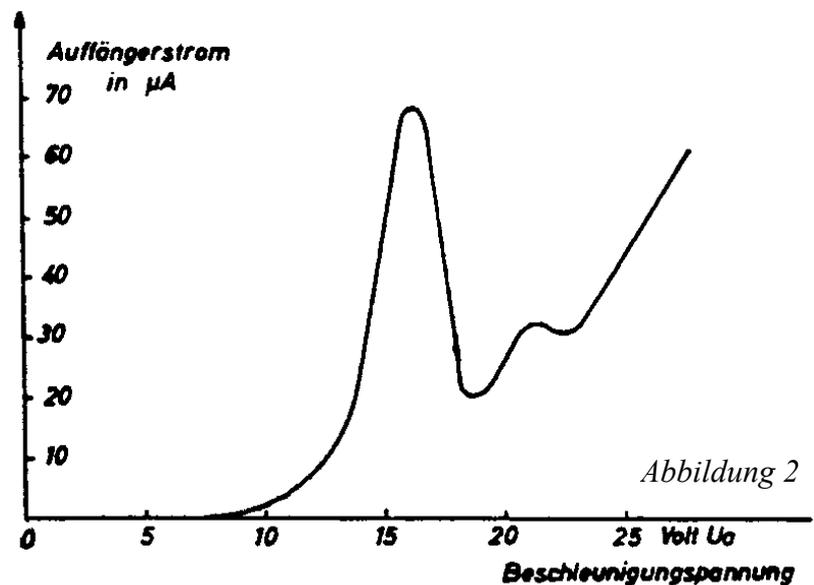


Abbildung 2

Als Hilfsmittel zur Beantwortung der Aufgaben werden zusätzlich gegeben:

- eine Übersicht über die Zuordnung von Farben zu Wellenlängen (Abbildung 3: hier sind die Wellenlängen in Ångström angegeben, einer alten Einheit: $10\text{Å} \hat{=} 1\text{ nm}$),
- eine Übersicht über die Leuchterscheinungen bei unterschiedlichen Beschleunigungsspannungen (Abbildung 4 – es ist jeweils nur das erste Auftreten der entsprechenden Farbe angegeben; das Leuchten setzt sich auch zu höheren Spannungen hin fort) und
- ein Auszug aus den Termschemata für Neon (Ne) und Quecksilber (Hg) (Abbildung 5 – dort sind die Energieniveaus in der Einheit eV angegeben und die Wellenlängen des ausgestrahlten Lichts in Å.

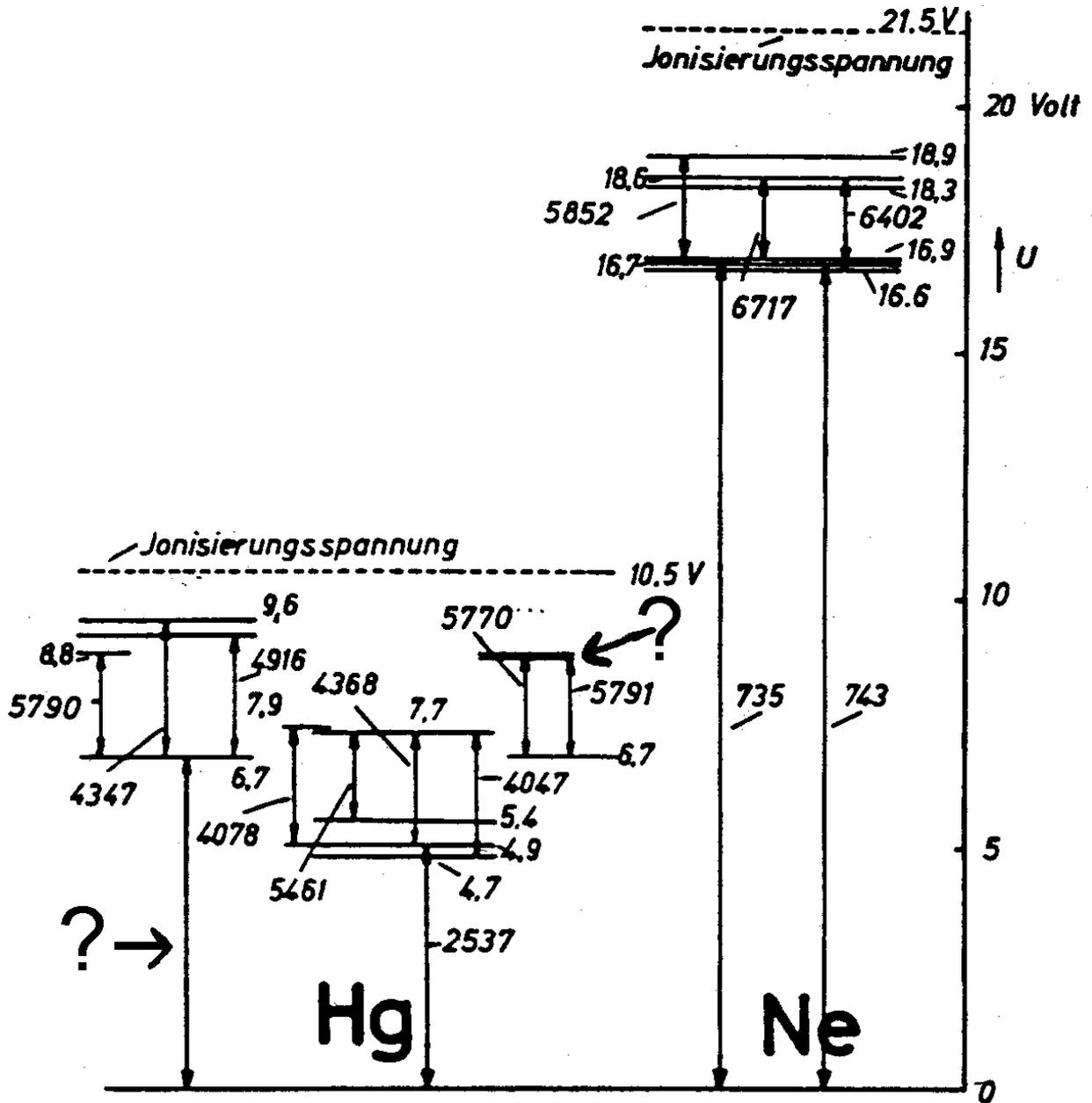
Farbe	Wellenlänge in Ångström
infrarot	über 8000
rot	6300 - 8000
orange	6000 - 6300
gelb	5700 - 6000
grün	5000 - 5700
blau	4000 - 5000
ultraviolett	unter 4000

Abbildung 3

Zahlen kleiner als 100 stehen für Energien, Zahlen größer als 100 für Wellenlängen).

Spannung U_B	Leuchterscheinung
7,0V – 10,0V	keine
10,0V – 18,0V	blau
18,0V – 18,5V	rot
18,5V – 19,0V	gelb

Abbildung 4



Vereinfachtes Niveau-Schema von Quecksilber und Neon mit einigen Übergängen
(Wellenlängen in Ångström-Einheiten)

Abbildung 5

Aufgaben:

- 1.1 Im Termschema zeigt links unten ein Pfeil auf eine senkrechte Linie, an der die Angabe der Wellenlänge fehlt. Berechnen Sie die Wellenlänge.

Die Linie steht für eine Energie von 6,7 eV.

$$\text{Es gilt } W = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{W} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6,7 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ m} = 1,85 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 185 \text{ nm}$$

- 1.2 Im Termschema zeigt in der Mitte ein Pfeil auf eine waagrechte Linie, an der die Angabe der Energie in eV fehlt. Berechnen Sie diese Energie.

Die Energie berechnet sich aus der Energie 6,7 eV plus der Energie eines Lichtquants mit der Wellenlänge 579,1 nm.

$$\text{Mit der Formel aus 1.1 ergibt sich } W = h \cdot c \text{ ober } \lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{579,1 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = \frac{3,43 \cdot 10^{-19}}{1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 2,14 \text{ eV}$$

Gesuchte Energie: 6,7 eV + 2,14 eV = 8,84 eV

- 1.3 Erläutern Sie, warum bei kleinen Spannungen kein Leuchten zu sehen ist und was die Ursache für das blaue, das rote und das gelbe Leuchten ist.

Aus der Abbildung 3 ersieht man, dass erst Licht ab einer Wellenlänge von über 4000 Å sichtbar ist. Laut Energieschema wird sichtbares (blaues) Hg-Licht von den Anregungsniveaus bei 7,7 eV und 9,6 eV ausgesendet. Da die Elektronen aber durch elastische Streuung mit Hg- und Ne-Atomen Energie verlieren (anscheinend in der Größenordnung von ca. 3 eV), sieht man das bläuliche Leuchten der Hg-Linien zwischen mit 434,7 nm und 436,8 nm erst ab einer Beschleunigungsspannung von ca. 10 V.

Zunächst wird bis etwa 18 V nur blaues Licht im sichtbaren Bereich ausgesendet.

Bei höheren Spannungen sieht man dann auch Licht, das von den Ne-Atomen ausgesendet wird. Dabei stammt das rote Licht (6402 Å und 6717 Å) vom Energieniveau bei 18,6 eV und das gelbe Licht (5852 Å) vom Energieniveau bei 18,9 eV.

- 1.4 Geben Sie die Ursachen an für den waagrecht Kurvenverlauf bei geringen Spannungswerten, für das Ansteigen der Kurve in verschiedenen Spannungsbereichen, für den Kurvenabfall in verschiedenen Spannungsbereichen und für alle Maxima und Minima beim Kurvenverlauf.

waagrecht Verlauf bei 0V bis 7V:

Die Elektronen führen mit den Gasatomen nur elastische Stöße aus, d.h. es wird keine Energie auf die Atome übertragen. Die kleinsten Anregungsenergien (Hg) liegen bei 4,7V bis 4,9V.

Die Gegenspannung beträgt 1,5V. Zusammen sind das etwas über 6 Volt.

Zunächst werden nur wenige Elektronen ihre Energie auf die Gasatome übertragen. Erst bei etwas höheren Beschleunigungsspannungen sind mehr Elektronen an dem Prozess beteiligt und erst dann kann der Stromfluss erkennbar.

Anstieg bei 7V bis 15V:

Immer mehr Elektronen gelangen mit Hilfe der zunehmenden Beschleunigungsspannung zur Anode, wobei der Effekt, dass eine Elektron zweimal an ein Gasatom Energie überträgt, auf Grund der geringen Hg-Gasdichte (das Rohr wird nicht geheizt!) äußerst selten ist.

Maximum bei 17V:

Die Energie zur Anregung der UV-Linien von Neon ist erreicht. Sehr viele Elektronen verlieren ihre Energie und der Stromfluss geht bei höheren Spannungen deshalb zunächst zurück.

Abfall bei 17V bis 19V:

Der Stromstärkenabfall erfolgt durch den Energieverlust bei den UV-Linien von Ne und wird

verstärkt bzw. aufrecht erhalten durch Anregung der roten und gelben Ne-Linien bei 18V bis 19V.

Minimum bei 19V und Anstieg von 19V bis etwa 22V:

Nach einmaligem Energieübertrag auf ein Ne-Atom sammeln immer mehr Elektronen wieder so viel Energie, dass sie die Gegenspannung überwinden können und zur Anode gelangen.

Maximum bei 22 Volt und Abfall bis ca. 23V:

Die Elektronen haben jetzt die Ionisationsenergie 21,5V von Ne erreicht und geben ihre Energie vermehrt ab, so dass wegen der Gegenspannung immer weniger zur Anode vordringen können.

Minimum bei 23V und weiterer Anstieg:

Die Elektronen, die Ne-Atome ionisiert haben, haben nun wieder so viel Energie gesammelt, dass sie die Gegenspannung überwinden können. Die Stromstärke steigt also wieder.

- 2 Aus einem Glühdraht austretende Elektronen werden in einer Vakuum-Kammer mit einer Spannung von $U_B=50V$ beschleunigt und durchlaufen dabei einen Metallzylinder, der isoliert in der Kammer angebracht ist (sogenannter Wehnelt-Zylinder). Durch eine kleine Blende B_1 treten die Elektronen in eine mit Helium-Gas gefüllte Kammer ein und darauf durch eine kleine Blende B_2 wieder in eine Vakuum-Kammer, die von einem Magnetfeld der Stärke $B=0,1mT$ durchsetzt wird, dessen Feldlinien senkrecht zur Flugrichtung der Elektronen verlaufen. Der Abstand a von B_2 bis zur Fotoplatte beträgt $a=15cm$. Die Fotoplatte wird an einigen Stellen durch die auftreffenden Elektronen geschwärzt. Die Intensität N dieser Schwärzung in Abhängigkeit von der Ablenkung d aus der geraden Flugrichtung ist folgendem Diagramm zu entnehmen:

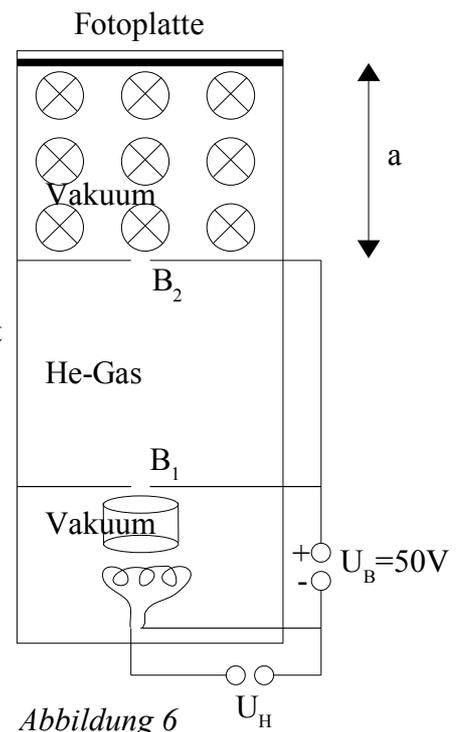


Abbildung 6



Abbildung 7

Aufgaben:

- 2.1 Beschreiben Sie, was der Wehnelt-Zylinder in der unteren Kammer bewirkt und warum er das bewirkt.

Zur Seite fliegende Elektronen setzen sich auf dem Zylinder ab und laden ihn negativ auf. Weitere Elektronen werden dadurch vom Zylinder abgestoßen und immer wieder in Richtung Achse des Zylinders gelenkt. Auf diese Art werden die Elektronen gesammelt und es stehen somit mehr Elektronen für den weiteren Prozess zur Verfügung.

- 2.2 Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Energie der Elektronen, die sie beim Durchgang durch die Blende B_1 besitzen.

Die Elektronen erfahren die Beschleunigungsspannung $U_B = 50\text{V}$ und damit die Energie $W_e = e \cdot U_B = 50\text{eV} = 8,0 \cdot 10^{-18}\text{ J}$.

Diese Energie wird in Bewegungsenergie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_e^2$ umgeformt:

$$W_e = W_{\text{kin}} \Rightarrow e \cdot U_B = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_e^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4193 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

- 2.3 Beschreiben Sie, welche Wechselwirkungen zwischen Elektronen und dem Helium-Gas in der mittleren Kammer vorkommen können.

Es kommen elastische Streuungen vor, bei denen die Elektronen an die Atome prallen ohne Energie zu übertragen. Jeder Stoßpartner behält seine Energie und somit auch seine Geschwindigkeit. Nur die Flugrichtung ändert sich ggf.

Bei unelastischen Streuungen übertragen die Elektronen Energie auf die Gasatome. Es können nur solche Energiebeträge übertragen werden, die Anregungsenergien von He-Atomen entsprechen. Nach dem Stoß fliegen die Elektronen mit einer geringeren Geschwindigkeit weiter, wobei die Abnahme an Geschwindigkeit dem Energieverlust entspricht.

- 2.4 Geben Sie mit Begründung die Art der Bahnkurve an, auf der sich die Elektronen in der oberen Kammer (mit Magnetfeld) bewegen.

Da die Vakuumkammer von einem Magnetfeld durchsetzt wird, wirkt auf senkrecht zu den Feldlinien bewegte Elektronen die Lorentzkraft, die die Elektronen jeweils senkrecht zur Flugrichtung ablenkt, so dass sich die Elektronen auf Kreisbahnen bewegen.

Je kleiner die Geschwindigkeit ist, desto mehr werden die Elektronen bei gleicher Flugstrecke aus ihrer Richtung abgelenkt.

Die am wenigsten abgelenkten Elektronen, die zwischen 5 und 6 auf dem Schirm auftreffen, sind also die schnellsten Elektronen, die keine Energie abgegeben haben.

- 2.5 Geben Sie qualitativ an, in welcher Weise der Auftreffpunkt der Elektronen auf der Fotoplatte von der Geschwindigkeit der Elektronen abhängig ist und begründen Sie Ihre Antwort durch Entwickeln einer entsprechenden Formel.

Teil 1 der Frage ist schon unter 2.4 beantwortet worden.

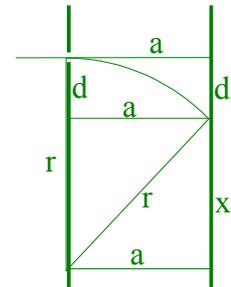
Entwicklung der Formel: Es wirkt die Lorentzkraft auf die Elektronen: $F_L = e \cdot v_e \cdot B$. Sie ist die Zentripetalkraft $F_Z = \frac{m \cdot v_e^2}{r}$ bei der Kreisbewegung, also es gilt: $F_L = F_Z$ oder $e \cdot v_e \cdot B = \frac{m \cdot v_e^2}{r}$.

Nach der Umformung $e \cdot B \cdot r = m \cdot v_e$ erkennt man $r \sim v_e$. Wenn v_e und damit r größer werden, werden die Elektronen nicht so weit seitlich ausgelenkt, da ihre Flugrichtung weniger gekrümmt ist. d (siehe Abbildung auf Seite 6) wird also kleiner.

2.6 Berechnen Sie, wo auf der Fotoplatte die Elektronen auftreffen, die mit 50V beschleunigt wurden und unterwegs keine Energie verloren haben, d.h. Abstand d zwischen Auftreffort bei gerader Flugrichtung und tatsächlichem Auftreffort berechnen.

Zeigen Sie durch Herleitung grundlegender Formeln, dass sich die Formel für d folgendermaßen ergibt:

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot m_e \cdot U_B}{e \cdot B^2}} - \sqrt{\frac{2 \cdot m_e \cdot U_B}{e \cdot B^2} - a^2}$$



Aus der Zeichnung rechts liest man ab: $r = d + x$ und $x = \sqrt{r^2 - a^2}$.

Damit gilt $r = d + \sqrt{r^2 - a^2} \Rightarrow d = r - \sqrt{r^2 - a^2}$.

Unter 2.5 wurde gezeigt $e \cdot B \cdot r = m \cdot v_e \Rightarrow r = \frac{m \cdot v_e}{e \cdot B}$.

Unter 2.2 wurde gezeigt $v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m_e}}$. Damit gilt $r = \frac{m_e \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m_e}}}{e \cdot B} = \sqrt{\frac{2 \cdot m_e \cdot U_B}{e \cdot B^2}}$.

Einsetzen ergibt:

$$d = r - \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot m_e \cdot U_B}{e \cdot B^2}} - \sqrt{\frac{2 \cdot m_e \cdot U_B}{e \cdot B^2} - a^2} = \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 50}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-8}}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 50}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-8}} - 0,15^2} \right) m = 5,3 \text{ cm}$$

2.7 Zeigen Sie, dass die Energie der Elektronen, die im Abstand d auf der Fotoplatte auftreffen, durch die Formel $W_e = e \cdot U = \frac{(a^2 + d^2)^2}{4 \cdot d^2} \cdot \frac{e^2 \cdot B^2}{2 \cdot m_e}$ gegeben ist.

Es gilt (s.o.) $e \cdot U_B = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_e^2$ und $e \cdot B \cdot r = m \cdot v_e \Rightarrow v = \frac{e \cdot B \cdot r}{m_e}$

Daraus folgt: $e \cdot U_B = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot \frac{e^2 \cdot B^2 \cdot r^2}{m_e^2} = \frac{e^2 \cdot B^2 \cdot r^2}{2 \cdot m_e}$ (1)

Aus der Zeichnung oben liest man ab:

$$x = \sqrt{r^2 - a^2} ; x = r - d \Rightarrow r - d = \sqrt{r^2 - a^2} \Rightarrow (r - d)^2 = r^2 - a^2 \Rightarrow r^2 - 2rd + d^2 = r^2 - a^2 \Rightarrow -2rd + d^2 = -a^2 \Rightarrow a^2 + d^2 = 2rd \Rightarrow r = \frac{a^2 + d^2}{2d}$$
 (2)

(2) eingesetzt in (1) ergibt: $e \cdot U_B = r^2 \cdot \frac{e^2 \cdot B^2}{2 \cdot m_e} = \frac{(a^2 + d^2)^2}{4 \cdot d^2} \cdot \frac{e^2 \cdot B^2}{2 \cdot m_e}$ q.e.d.

2.8 Berechnen Sie die Energien der Elektronen, die bei den Linien in der Abbildung 7 auftreffen.

Aus dem Graphen werden die Auftrefforte d der Elektronen in cm abgelesen: 5,4 ; 8,0 ; 8,4 ; 8,7. Der kontinuierliche Bereich beginnt bei $d = 8,8$.

Mit $a = 15 \text{ cm}$; $B = 0,1 \text{ mT} = 10^{-4} \text{ T}$ und $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ und den oben genannten Werten lassen sich die Energien berechnen:

d in m	0,053	0,080	0,084	0,087	0,088
W in J	8,032E-018	4,597E-018	4,361E-018	4,208E-018	4,161E-018
W in eV	50,1	28,7	27,2	26,3	26,0
50eV-W in eV	-0,1	21,3	22,8	23,7	24,0

Für die Elektronen, die keine Energie abgegeben haben, müsste eigentlich genau die Energie 50eV berechnet werden. Dass sich 50,1eV ergeben, liegt daran, dass ein genaues Ablesen aus dem Messgraph nicht möglich ist. Für $d=0,054\text{cm}$ ergäben sich z.B. 48,7eV.

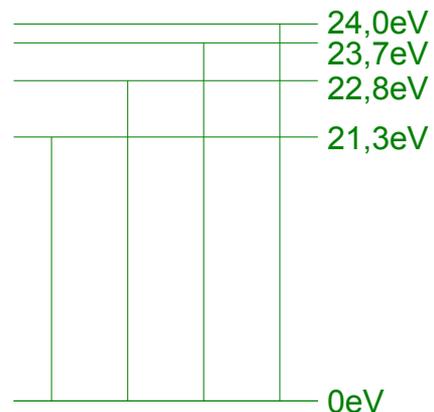
Auch ein Magnetfeld etwas anderer Stärke kann für die Abweichung zuständig sein. Wenn z.B. statt mit $B=1,00 \cdot 10^4\text{T}$ mit $B=1,02 \cdot 10^4\text{T}$ gerechnet wird, ergeben sich 50,7eV.

- 2.9 Stellen Sie auf Grund Ihrer Berechnungen ein Termschema für Helium auf.
Gehen Sie auch auf die Bedeutung des kontinuierlich verlaufenden Bereichs in der Abbildung 7 ein.

Die Elektronen verlieren von ihrer ursprünglichen Energie ($W=50\text{eV}$) bei der Energieabgabe an die He-Atome einen bestimmten Betrag. Diesen erhält man durch Differenzbildung (Tabelle unter 2.8, unterste Reihe).

Aus den berechneten Werten ergibt sich nebenstehendes Termschema.

Der Vergleich mit dem intenzstehenden Termschema zeigt gute Übereinstimmung (Singulettssystem, Übergangslinien beachten).

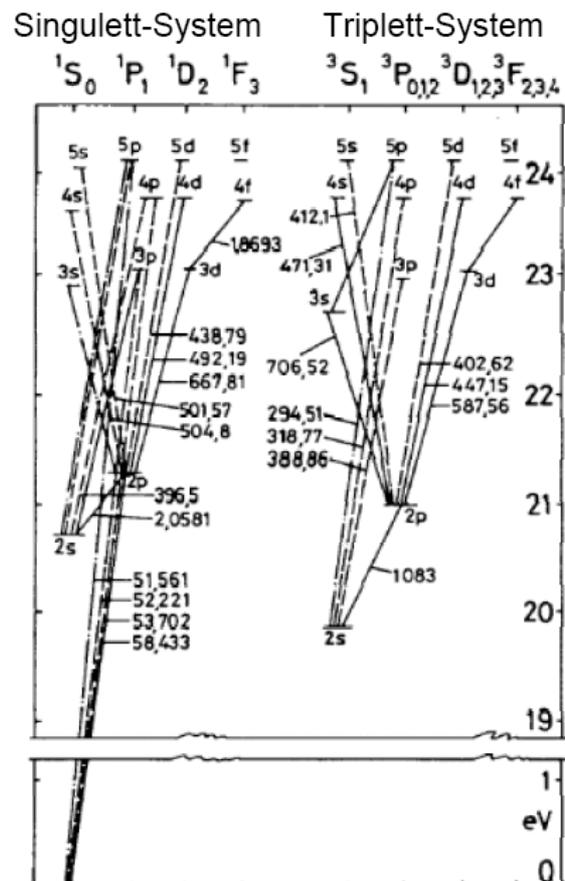


Termschema des Heliumatoms

Die häufigsten der erlaubten Übergänge sind jeweils mit der zugehörigen Wellenzahl eingezeichnet.

Offensichtlich liegen die Triplett-Zustände in allen Fällen energetisch tiefer als die Singulett-Zustände mit gleichen Quantenzahlen

Quelle: http://www.uni-ulm.de/~hhoster/PC_III/ (2006-01-06)



Der kontinuierliche Bereich kommt dadurch zustande, dass die Elektronen die He-Atome ionisieren

und ihnen noch zusätzliche Energie mitgeben. Diese zusätzliche Energie ist nicht gequantelt und deshalb kann jeder mögliche Energiebetrag übergeben werden.

2.10 Zeigen Sie Unterschiede auf zwischen diesem Versuch und dem im Unterricht besprochenen Franck-Hertz-Versuch.

Beim Franck-Hertz-Versuch (=FHV) wurde eine Gegenspannung verwendet, die hier weg fällt.

Beim FHV konnten die Elektronen nach der Energieabgabe weiter beschleunigen. Das ist hier nicht möglich, weil die Beschleunigungsstrecke schon verlassen wurde. Deshalb kann jedes Elektron auch nur einmal beim Durchlaufen der Kammer Energie abgeben. Dass keine Energieabgabe an schon angeregte Atome erfolgt, hängt ggf. an der geringen Gasdichte oder der fehlenden Wahrscheinlichkeit für ein solches Ereignis zusammen.

Beim FHV war kein Magnetfeld vorhanden.

Beim FHV verschiedene Beschleunigungsspannungen, hier eine feste Spannung.

Beim FHV eine Anregungsenergie über Spannungsdifferenzen bestimmt, hier mehrere Anregungsenergien gemessen.

3 Abbildung 8 zeigt Spektren einer Röntgenröhre mit Molybdän-Anode.

3.1 Berechnen Sie die Wellenlänge der L_{α} -Linie von Molybdän.

Aus dem Diagramm liest man folgende Wellenlängen ab: $\lambda_{K_{\alpha}} = 0,71 \text{ \AA}$; $\lambda_{K_{\beta}} = 0,63 \text{ \AA}$.

Nach der Formel $W = h \cdot \frac{c}{\lambda}$ gehören zu den

Wellenlängen folgende Energien ($1 \text{ \AA} \cong 0,1 \text{ nm}$)

$$W_{K_{\alpha}} = 2,798 \cdot 10^{-15} \text{ J} ; W_{K_{\beta}} = 3,153 \cdot 10^{-15} \text{ J} .$$

Die L_{α} -Linie ist die Linie, die beim Übergang vom K_{β} -Niveau zum K_{α} -Niveau entsteht, d.h. es wird dabei Licht der Energie

$$W_{K_{\alpha}} - W_{K_{\beta}} = 0,355 \cdot 10^{-15} \text{ J} \text{ ausgesendet.}$$

Dazu gehört wegen $\lambda = \frac{h \cdot c}{W}$ die Wellenlänge

$$\lambda_{L_{\alpha}} = 5,59 \text{ \AA} .$$

3.2 Erläutern Sie, warum nur bei einem Spektrum die K_{α} - und die K_{β} -Linie eingezeichnet sind.

Bei den anderen Spektren sind die Energien so gering, dass die K-Linien nicht angeregt werden können. Beim 20kV-Spektrum würde die K_{α} -Linie noch soeben im Messbereich liegen, aber die Intensität ist hier in der Nähe der Abbruchkante so gering, dass kein nennenswerter Effekt gemessen wird.

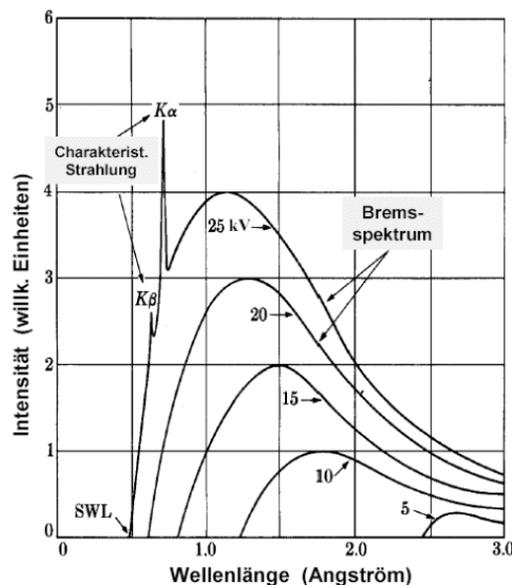


Abbildung 8

Röntgenspektren einer Molybdänanode bei verschiedenen Anodenspannungen

Quelle: <http://ibb.gsf.de/reports/2004/gurschler.pdf> (04.12.2005)

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!