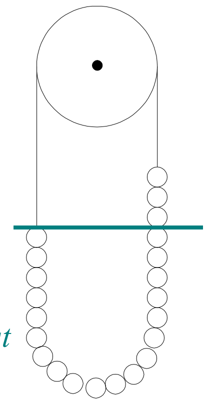
Lösung

1 Eine an einem Faden befestigte Metallkette schwingt, wenn man sie (wie nebenstehend abgebildet) über eine Rollscheibe hängt.
Der Faden sei masselos, die Scheibe sei reibungsfrei gelagert, die Kettenglieder seien ohne Reibung gegeneinander beweglich.
Zeigen Sie, dass die Schwingung dieser Kette eine harmonische Schwingung ist.

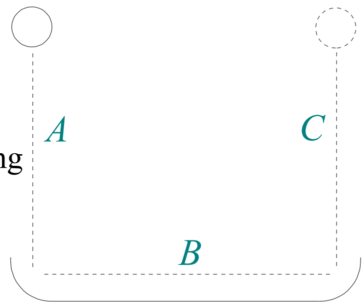


Dreht sich die Rolle, so wird die überstehende Länge der Kette proportional zum Drehwinkel größer, damit aber auch die Gewichtskraft dieses Kettenstücks und damit auch die rücktreibende Kraft. Eine harmonische Schwingung ist aber gerade so definiert, dass die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung wächst. Folglich ist die Schwingung harmonisch.

---

2 Ein Ball fällt senkrecht in freiem Fall, wird dann so ohne Geschwindigkeitsverlust abgelenkt, dass er auf einer waagrechten Platte weiter rollt und wird dann ohne Geschwindigkeitsverlust senkrecht nach oben abgelenkt. Darauf läuft der Bewegungsvorgang in umgekehrter Richtung ab.
Der Startpunkt liegt 1m oberhalb der Platte, die Platte ist 1m lang.
Berechnen Sie die Schwingungsdauer dieser Schwingung.

Rechnen Sie mit $g = 10\frac{m}{s^2}$.



Der Weg der Kugel wird unterteilt in die 3 Bereiche A, B und C.
Die Zeit t_1 für die Bewegung entlang der Strecken A und C (nach unten wie nach oben) ist gleich.
t_2 sei die Zeit für die Bewegung entlang der Strecke B (nach rechts oder nach links).

Für t_1 gilt (beschleunigte Bewegung): $s_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \;\Rightarrow\; t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{10}}\, s = \frac{1}{\sqrt{5}}\, s$

Als Maximalgeschwindigkeit ergibt sich: $v = g \cdot t_1 = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{m}{s} = 2 \cdot \sqrt{5} \frac{m}{s}$

Für t_2 gilt (geradlinig gleichförmige Bewegung): $s_2 = v \cdot t_2 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}}\, s$

Die Schwingungsdauer T ergibt sich aus $T = 4 \cdot t_1 + 2 \cdot t_2 = \left(4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5}}\right) s = \frac{4+1}{\sqrt{5}}\, s = \frac{5}{\sqrt{5}}\, s = \sqrt{5}\, s$

---

3 Eine Metallkugel der Masse m=1kg lenkt eine weiche Schraubenfeder um 1m aus.
a) Nun lässt man diese Kugel an dieser Schraubenfeder schwingen.
Berechnen Sie die Schwingungsdauer.

Mit $F = D \cdot s$ ergibt sich $D = \frac{F}{s} = \frac{m \cdot g}{s} = \frac{1 \cdot 10}{1} \frac{N}{m} = 10 \frac{N}{m}$.

Schwingungsdauer $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{10}}\, s = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{10}}\, s$

b) Berechnen Sie, wie lang ein Fadenpendel sein müsste, damit es die gleiche Schwingungsdauer hätte wie das Federpendel.
Als Pendelmasse dient die oben erwähnte Kugel.

$$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l=\frac{T^2\cdot g}{4\cdot\pi^2}=\frac{\frac{4\cdot\pi^2}{10}\cdot 10}{4\cdot\pi^2}m=1\,m$$

c) Berechnen Sie, wie es sich auf die Schwingungsdauer des Feder- und des Fadenpendels auswirken würde, wenn man statt der oben beschriebenen Kugel eine Kugel der Masse 4kg benutzen würde.

In der Formel für das Fadenpendel ist die Schwingungsmasse nicht enthalten. Deshalb bleibt die Schwingungsdauer beim Fadenpendel gleich.
Bei der Schraubenfeder gilt $T\sim\sqrt{m}$ *. Bei 4-facher Masse wächst die Schwingungsdauer also auf den doppelten Wert.*

$$T_{Federpendel}=\frac{2\cdot\pi}{\sqrt{10}}s \;;\; T_{Schraubenfeder}=\frac{4\cdot\pi}{\sqrt{10}}s$$

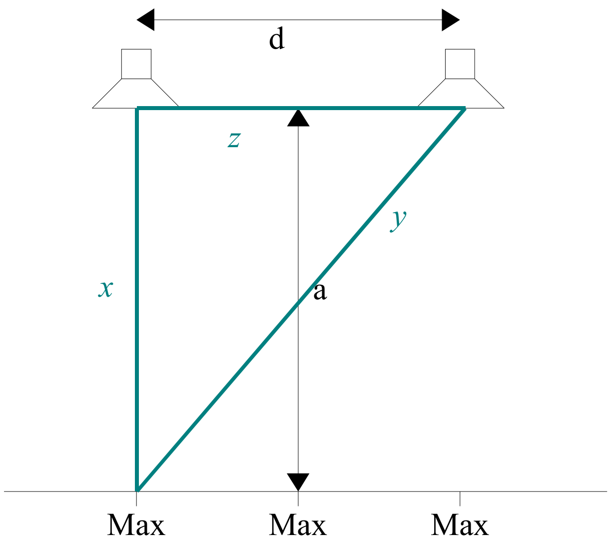
---

4 Der Ton einer Stimmgabel mit der Frequenz f_1=400 Hz wird dem Ton einer anderen Stimmgabel mit der Frequenz f_2=402 Hz überlagert. Dadurch hört man ein ständiges An- und Abschwellen der Lautstärke.
Berechnen Sie die Frequenz dieser Schwebung.

Überlagern sich die Schwingungen von 2 Stimmgabeln mit den Frequenzen f_1 *und* f_2*, so schwingt die eine Stimmgabel* $|f_2 - f_1|$ *mal mehr pro Sekunde als die andere. Es gibt also* $|f_2 - f_1|$ *mal eine Verstärkung (bzw. eine Auslöschung) pro Sekunde, d. h. die Schwebungsfrequenz beträgt* $f_{Schwebung} = |f_2 - f_1|$ *, in diesem Fall also* $f_{Schwebung} = |402\text{ Hz} - 400\text{ Hz}| = 2\text{ Hz}$ *.*

---

5 Zwei Lautsprecher im Abstand d=1m senden einen Sinuston der selben Frequenz aus.
Im Abstand a=5m wird ein Empfänger auf einer parallel zur Verbindungslinie der Lautsprecher liegenden Gerade verschoben.
Genau in der Mitte zwischen den Lautsprechern und jedem der beiden Lautsprechern direkt gegenüber wird maximale Lautstärke gemessen.
Dazwischen ist die Lautstärke niedriger.
Zum Versuchsaufbau und zur Lage der Maxima siehe nebenstehende Zeichnung.
Die Schallgeschwindigkeit betrage c=340 m/s.
Berechnen Sie die Frequenz des von den Lautsprechern ausgesendeten Tons.



Von den Lautsprechern bis zum mittleren Maximum sind die Wege gleich lang, d. h. es überlagern sich Wellenberg mit Wellenberg und Wellental mit Wellental. Deshalb das Maximum der Lautstärke.
Damit sich auch bei den nebenliegenden Maxima Wellenberge und Wellentäler jeweils überlagern, muss gelten $y=x+\lambda$ *. Da das aus x, y und z gebildete Dreieck laut Aufgabenstellung rechtwinklig*

ist, gilt mit Pythagoras $x^2+z^2=y^2=(x+\lambda)^2 \Rightarrow x+\lambda=\sqrt{x^2+z^2} \Rightarrow \lambda=\sqrt{x^2+z^2}-x$.

Mit den angegebenen Werten $z=d=1\,m$ *und* $x=a=5\,m$ *gilt* $\lambda=(\sqrt{25+1}-5)\,m=(\sqrt{26}-5)\,m$.

Mit $c=f\cdot\lambda$ *gilt:* $f=\frac{c}{\lambda}=\frac{340}{\sqrt{26}-5}\,Hz\approx 3434\,Hz$

---

6 Ein Messgerät für Wasserwellen besteht aus 2 Messfühlern, die genau 2m voneinander entfernt angebracht sind. Immer nach genau 1s nehmen beide Messfühler gleichzeitig einen Wert auf.
Als das Gerät getestet wird, zeigt es eine durchgehend ruhige Wasseroberfläche an (alle Messwerte: s=0m), obwohl deutlich eine Wellenbewegung zu erkennen ist.

a) Nehmen Sie Stellung zu der Frage, ob das Gerät defekt ist oder ob unter bestimmten Bedingungen (Eigenschaften der Wellen) ein solches Messergebnis vorkommen kann. Wenn ja, dann bitte diese Bedingungen mit Begründung angeben.

Besitzen die Wasserwellen eine Wellenlänge von λ=2m (Abstand der Messfühler) und eine Schwingungsdauer von T=1s (zeitlicher Abstand der Messungen) und findet die erste Messung statt, wenn die Auslenkung der Welle gerade s=0m beträgt, so ist das Messergebnis exakt, weil dann an den beiden Messpunkten zur selben Zeit die Auslenkung s=0m besteht..
Auch weitere Bedingungen könnten zu diesem überraschenden Ergebnis führen:
λ=1m ; T=1s ; Messbeginn bei s=0m ,
λ=0,5m ; T=1s ; Messbeginn bei s=0m ,
λ=1m ; T=0,5s ; Messbeginn bei s=0m ,
allgemein: $\lambda=\frac{2}{n}m$; $T=\frac{1}{m}s$; $n, m\in\mathbb{N}$; *Messbeginn bei s=0m*

b) Untersuchen Sie, ob es Möglichkeiten für eine andere Messapparatur geben könnte, bei der eine solche Fehlmessung unmöglich ist (z. B. mehr Messpunkte, andere Anordnung usw.).

Zu jedem λ und jedem T lassen sich Anordnungen und Messintervalle finden, so dass immer die Auslenkung s=0m gemessen wird. Die Abstände zwischen den Messstellen und die Messintervalle müssen nur genügend groß gewählt werden.
Da λ und T von Wasserwellen aber nur innerhalb bestimmter Grenzen variieren können, lassen sich Messanordnungen konstruieren, die verlässliche Werte ermitteln können.
Es wäre z. B. sinnvoll, die Messintervalle sehr viel kleiner als die Schwingungsdauer T zu wählen.

---

7 Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich
a) ein bewegter Sender einem ruhenden Beobachter,
b) ein bewegter Beobachter einem ruhenden Sender
nähern muss, damit der ausgesendete Ton eine Oktave höher (doppelte Frequenz) klingt.

zu a): Damit der Ton höher wird, muss sich der Sender dem Beobachter nähern.

Hier gilt die Formel $f'=f\cdot\frac{c}{c-v}$ *mit* $f'=2\cdot f$

also: $2f=f\cdot\frac{c}{c-v} \Rightarrow 2c-2v=c \Rightarrow c=2v \Rightarrow v=\frac{c}{2}=\frac{340}{2}\frac{m}{s}=170\frac{m}{s}$

zu b): Damit der Ton höher wird, muss sich der Beobachter dem Sender nähern.

Hier gilt die Formel $f'=f\cdot\frac{c+v}{c}$ *mit* $f'=2\cdot f$

also: $2f=f\cdot\frac{c+v}{c} \Rightarrow 2c=c+v \Rightarrow v=c=340\frac{m}{s}$

8 Eine Lok der Museumseisenbahn stößt immer Pfiffe der selben Frequenz aus (1000 Hz). Ein mitfahrender Beobachter hört diese Pfiffe auf dem hintersten Wagen der Bahn. Berechnen Sie, Töne welcher Frequenz er hört, wenn sich die Bahn a) vorwärts (d. h. die Lok fährt vor dem Wagen her und zieht ihn), b) rückwärts (d. h. die Lok schiebt die Wagen vor sich her) jeweils mit v=20 m/s bewegt. Schallgeschwindigkeit c=340 m/s.
Untersuchen Sie auch, ob sich andere Geschwindigkeiten v auf die gehörten Töne bei a) und b) auswirken können.

zu a): *Da sich der Sender entfernt, gilt die Formel* $f' = f \cdot \frac{c}{c+v}$. *$f'$ ist aber noch nicht die gehörte Frequenz, weil der Beobachter sich ja der Schallquelle nähert. Die Frequenz f' ändert sich zur Frequenz f'' nach der Formel* $f'' = f' \cdot \frac{c+v}{c}$.

Zusammengefasst gilt: $f'' = f' \cdot \frac{c+v}{c} = f \cdot \frac{c}{c+v} \cdot \frac{c+v}{c} = f$

Der Beobachter hört also die Originaltonhöhe von 1000 Hz.

zu b): *Da sich der Sender nähert, gilt die Formel* $f' = f \cdot \frac{c}{c-v}$. *$f'$ ist aber noch nicht die gehörte Frequenz, weil sich der Beobachter ja von der Schallquelle entfernt.*
Die Frequenz f' ändert sich zur Frequenz f'' nach der Formel $f'' = f' \cdot \frac{c-v}{c}$.

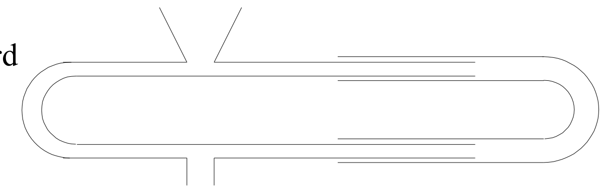
Zusammengefasst gilt: $f'' = f' \cdot \frac{c-v}{c} = f \cdot \frac{c}{c-v} \cdot \frac{c-v}{c} = f$

Der Beobachter hört also die Originaltonhöhe von 1000 Hz.

Da die Geschwindigkeit v im Ergebnis $f'' = f$ nicht auftritt, gilt das oben genannte Ergebnis für beliebiges v, allerdings mit einer Einschränkung:
Ist die Geschwindigkeit des Zuges bei b) größer als die Schallgeschwindigkeit (was natürlich im alltäglichen Leben nicht vorkommt), so gelangt der Schall nicht zum Beobachter. In diesem Fall wird also gar kein Ton gehört.

---

9 An die untere Öffnung des Trompetenrohres wird eine Stimmgabel gehalten. An der oberen Öffnung wird der Schall analysiert.
Die rechte Rohrhälfte lässt sich nach rechts und links verschieben.



Beim Verschieben hört man den Ton oben manchmal lauter und manchmal leiser.
Ist der Ton maximal laut zu hören, so ist er nach einer Bewegung des Rohres um 2,3 cm wieder maximal laut.
Berechnen Sie die Frequenz des Tones.

Treffen die Wellenberge der links- und rechtsherum laufenden Welle gleichzeitig beim oberen Auslass ein, so verstärken sich die Wellen maximal. Bewegt sich das rechte Rohr um 2,3 cm nach rechts, so hat gerade eine Wellenlänge mehr Platz im rechten Teil. Der Weg im rechten Teil hat sich um 2 · 2,3 cm = 4,6 cm = λ verlängert.

Mit $c = f \cdot \lambda$ folgt: $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{340}{0{,}046}\,Hz \approx 7391\,Hz$

Formeln

$s(t) = s_M \cdot \sin(\omega \cdot t)$ $\qquad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ $\qquad f = \frac{1}{T}$

$F = D \cdot s$ $\qquad F = m \cdot a$ $\qquad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ $\qquad T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$ $\qquad s = v \cdot t$

$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ $\qquad v = a \cdot t$ $\qquad a = \dot{v} = \ddot{s}$

$c = \lambda \cdot f$ $\qquad s = s_M \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$

$f' = f \cdot \frac{c}{c - v}$ $\qquad f' = f \cdot \frac{c}{c + v}$ $\qquad f' = f \cdot \frac{c - v}{c}$

$f' = f \cdot \frac{c + v}{c}$ $\qquad \Delta s = n \cdot \lambda$ $\qquad \Delta s = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!