# 04.06.2003 Klausur 2 Kurs Ma22
# Mathematik Lk

## Lösung

**1** Gegeben ist die Gleichung $x \cdot y^2 - y^2 - x^3 = 0$ . [1]
Verschaffen Sie sich einen Überblick über den Kurvenverlauf, indem Sie die Kurve auf Asymptoten und waagrechte sowie senkrechte Tangenten untersuchen.
Untersuchen Sie besonders das Steigungs-Verhalten der Kurve für x=0 und $x \to \pm\infty$ und bilden Sie die erste implizite Ableitung nach x und nach y.
Zeichnen Sie auf Grund der gefundenen Eigenschaften die Kurve.

*Lösung:*
*Man sieht sofort, dass für x = 0 auch y = 0 und für y = 0 auch x = 0, d.h. der Ursprung ist der einzige Punkt der Kurve auf den Koordinatenachsen.*

*Auflösen der Gleichung nach $y^2$ gibt:* $y^2 = \frac{x^3}{x-1}$ [2]. *Da links eine positive Zahl steht, muss auch der rechte Term positiv sein, d.h. es muss gelten* $(x^3 \ge 0 \wedge x-1 > 0) \vee (x^3 \le 0 \wedge x-1 < 0)$
*bzw.* $(x \ge 0 \wedge x > 1) \vee (x \le 0 \wedge x < 1) \;\Rightarrow\; x > 1 \vee x \le 0$ *, d.h. für $0 < x \le 1$ gibt es keine y-Werte.*

*Da y nur in der 2.Potenz vorkommt, ist die Kurve **achsensymmetrisch zur x-Achse**.*

***waagrechte Tangenten**:(Ableitung nach x)* $1 \cdot y^2 + x \cdot 2yy' - 2yy' - 3x^2 = 0$
*Wegen y'=0 folgt $y^2=3x^2$ . Einsetzen in [1] gibt* $x \cdot 3x^2 - 3x^2 - x^3 = 0 \;\Rightarrow\; 2x^3 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow$

$$x_1 = 0 \;\vee\; 2x_2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{3}{2}$$

*Eingesetzt in [2] ergibt sich* $y_1 = 0$ und $y_2 = \pm\sqrt{\frac{\frac{27}{8}}{\frac{3}{2}-1}} = \pm\sqrt{\frac{27}{8}\cdot\frac{2}{1}} = \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}$

***senkrechte Tangenten**:(Ableitung nach y)* $x' \cdot y^2 + x \cdot 2y - 2y - 3x^2 x' = 0$
*Wegen x'=0 folgt 2xy - 2y = 2y(x - 1) = 0 , also y = 0 oder x = 1 .*
*Da bei y = 0 (also bei (0/0)) nun neben einer waagrechten Tangente auch eine senkrechte Tangente gefunden wurde, muss das Verhalten am Punkt (0/0) näher untersucht werden.*
*Da x nicht 1 sein darf, entfällt dieser Wert als Lösung.*

***Verhalten der Kurve bei (0/0)**:*
*Ansatz der Näherungsgeraden: y = m · x. Einsetzen in [1] und umformen:*

$$x \cdot m^2 x^2 - m^2 x^2 - x^3 = 0 \;\Rightarrow\; m^2 x^3 - m^2 x^2 - x^3 = 0 \;\Rightarrow x^3 \cdot (m^2 - 1) + x^2 \cdot (-m^2) = 0 \;\Rightarrow$$

$$x \cdot (m^2 - 1) - m^2 = 0 \;\underset{x \to 0}{\Rightarrow}\; m = 0 \;.$$

*Wegen der Achsensymmterie und der Steigung 0 bei (0/0) und der Bedingung $x \le 0$ muss bei (0/0) eine Spitze vorliegen.*

***Verhalten der Kurve bei $x \approx 1$**:*
*Aus [2] erkennt man, dass für $x \to 1$ die y-Werte gegen $\infty$ gehen, also liegt hier eine senkrechte*

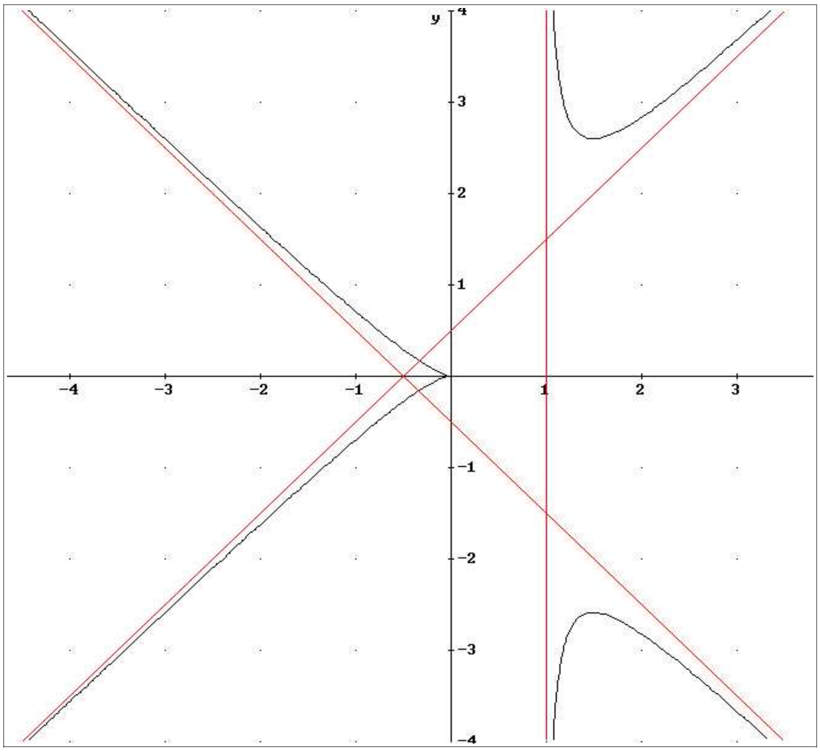
*Asymptote vor.*

***Verhalten der Kurve für x $\to \pm\infty$** (waagrechte oder schräge Asymptote?):*
*Ansatz der Näherungsgeraden: $y = m \cdot x + c$. Einsetzen in [1] und umformen:*

$$x \cdot (mx+c)^2 - (mx+c)^2 - x^3 = 0 \;\Rightarrow\; m^2x^3 + 2mcx^2 + c^2x - m^2x^2 - 2mcx - c^2 - x^3 = 0 \;\Rightarrow$$

$$x^3 \cdot (m^2-1) + x^2 \cdot (2mc - m^2) + x \cdot (c^2 - 2mc) - c^2 = 0 \;\Rightarrow\; m^2 - 1 + \frac{2mc - m^2}{x} + \frac{c^2 - 2mc}{x^2} - \frac{c^2}{x^3} = 0$$

*Für x $\to \infty$ ergibt sich $m^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; m = \pm 1$. Eine Zeile höher diesen m-Wert einsetzen und die Gleichung mit x multiplizieren liefert: $\pm 2c - 1 + \frac{c^2 \mp 2c}{x} - \frac{c^2}{x^2} = 0$. Für x $\to \infty$ ergibt sich daraus $\pm 2c - 1 = 0 \;\Rightarrow\; c = \pm\frac{1}{2}$, also sind $y_1 = x + \frac{1}{2}$ und $y_2 = -x - \frac{1}{2}$ zwei schräge Asymptoten. Daraus ergibt sich folgender Graph (Asymptoten sind rot gezeichnet):*

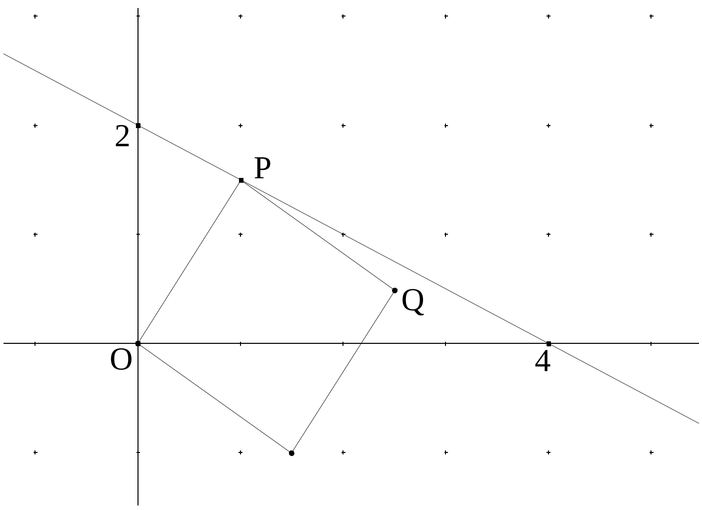



---

**2** Die Gerade mit der Gleichung

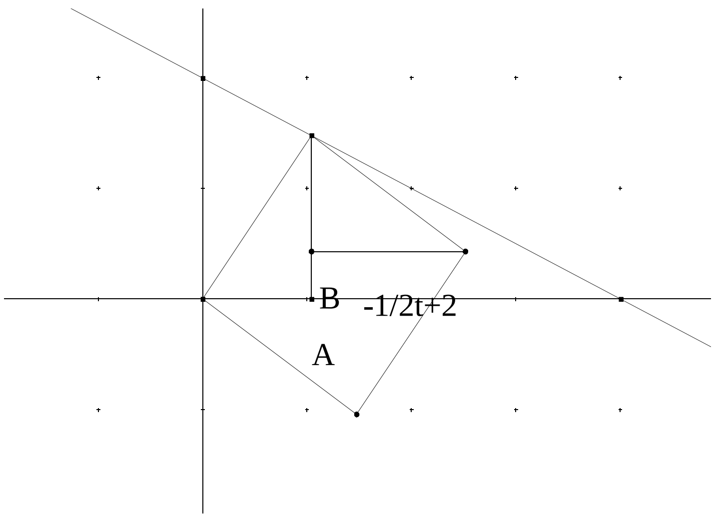
$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \text{ist gegeben.}$$

Ein Quadrat wird so eingezeichnet, dass ein Punkt O auf (0/0) und ein weiterer Punkt P auf der Geraden liegt (siehe Skizze).
Wird P auf der Geraden entlang geschoben, bewegt sich Punkt Q auf einem Graphen, der mit der x- und der y-Achse eine Fläche im 1. Quadranten vollständig umschließt.



Benennen Sie die x-Koordinate des Punktes P mit t und zeigen Sie, dass die Gleichung des Graphen, auf dem sich Q bewegt, in Parameterform so lautet:

$$x(t)=\frac{1}{2}t+2 \quad y(t)=-\frac{3}{2}t+2$$




*Lösung:*
*Wenn die x-Koordinate vom Punkt P gleich t ist, ist die y-Koordinate wegen der Gleichung* $y=-\frac{1}{2}x+2$ *gleich* $-\frac{1}{2}t+2$ *. Da die Dreiecke OAP und PBQ kongruent sind, sind diese Längen auch im 2.Dreieck zu finden. Damit ergeben sich für x und y:*

$$x(t)=t+(-\frac{1}{2}t+2)=\frac{1}{2}t+2 \qquad y(t)=-\frac{1}{2}t+2-t=-\frac{3}{2}t+2$$

*q.e.d.*

Berechnen Sie mit Hilfe der Formel $\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x(t)y'(t)-x'(t)y(t))\,dt$ den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen und den Koordinatenachsen vollständig eingeschlossen wird und weisen Sie mit einem einfachen mathematischen Verfahren aus der Sek.I nach, dass das Ergebnis richtig sein kann.

*Lösung:*
*Wenn durch den Graphen, den der Punkt Q beschreibt, eine Teilfläche des 1.Quadranten abgetrennt werden soll, muss für einen Wert $t_1$ die Kurve die x-Achse und für einen Wert $t_2$ die Kurve die y-Achse schneiden. Berechnung dieser t-Werte:*

*x-Achse: Bedingung y = 0, also:* $0=-\frac{3}{2}t_1+2 \Rightarrow \frac{3}{2}t_1=2 \Rightarrow t_1=\frac{4}{3}$

*y-Achse: Bedingung x = 0, also:* $0=\frac{1}{2}t_2+2 \Rightarrow \frac{1}{2}t_2=-2 \Rightarrow t_2=-4$

*Mit* $x'(t)=\frac{1}{2}$ *und* $y'(t)=-\frac{3}{2}$ *gilt:*

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x(t)y'(t)-x'(t)y(t))\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{4}{3}}^{-4}\left(\left(\frac{1}{2}t+2\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}t+2\right)\right)dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{4}{3}}^{-4}\left(-\frac{3}{4}t-3+\frac{3}{4}t-1\right)dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{4}{3}}^{-4}(-4)\,dt=-2\int_{\frac{4}{3}}^{-4}dt=[-2t]_{\frac{4}{3}}^{-4}=8-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$$

*Der Flächeninhalt der im 1.Quadranten abgeschnittenen Fläche beträgt also 32/3.*
*Die Form des von Q erzeugten Graphen erhält man, wenn man den Parameter t aus den Gleichungen für x(t) und y(t) eliminiert:*

$$x=\frac{1}{2}t+2 \Rightarrow t=2x-4 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}t+2=-\frac{3}{2}(2x-4)+2=-3x+6+2=-3x+8$$

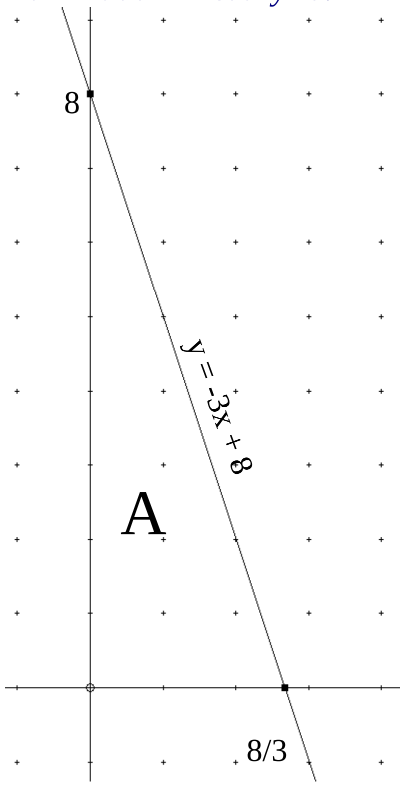
*Es ergibt sich also die Gerade mit der Gleichung* $y = -3x + 8$ *.*
*Die Fläche lässt sich also einfach durch die Berechnung einer Dreiecksfläche ermitteln. Dazu müssen nur noch die Schnittpunkte mit der x- und y-Achse gefunden werden.*

*Der y-Achsenabschnitt ist 8. Den Schnittpunkt mit der x-Achse erhält man mit dem Ansatz y=0:*

$$0=-3x+8 \;\Rightarrow\; 3x=8 \;\Rightarrow\; x=\frac{8}{3}\;.$$

*Die Fläche ergibt sich aus* $A=\frac{1}{2}x\cdot y=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot 8=\frac{64}{6}=\frac{32}{3}$

*Das Ergebnis stimmt mit dem bestimmten Integral überein.*



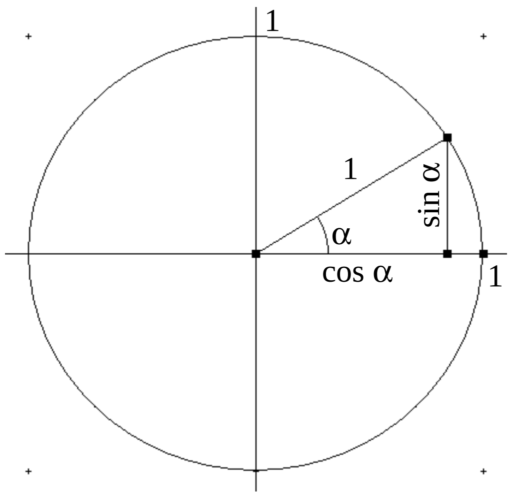

3 Gegeben ist eine Kurve in Parameterform:

$x(t)=3+2\cdot\cos t \quad y(t)=2+3\cdot\sin t\;.$

Beweisen Sie die Formel $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\;.$

Untersuchen Sie die Kurve auf waagrechte und senkrechte Tangenten und skizzieren Sie den Graph dieser Kurve.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve vollständig umschlossen wird.




*Lösung:*

*Wendet man den Satz des Pythagoras auf das Dreieck in nebenstehender Skizze an, erhält man unmittelbar die gewünschte Formel.*

*Es gilt* $x'(t)=-2\cdot\sin t$ *und* $y'(t)=3\cdot\cos t\;.$

*Weiter gilt: Wenn x'(t) = 0 und y'(t) $\neq$ 0, dann liegt eine senkrechte Tangente vor.*

*Und: Wenn y'(t) = 0 und x'(t) $\neq$ 0, dann liegt eine waagrechte Tangente vor.*

$x'(t)=0 \;\Rightarrow\; -2\cdot\sin t=0 \;\Rightarrow\; t_1=0\;\;;t_2=\pi\;.$ *y'(t) ist für beide Werte ungleich 0.*

*Koordinaten:* $t_1$ *:(3+2/2+0) = (5/2)*   $t_2$ *: (3-2/2+0) = (1/2)*

$y'(t)=0 \;\Rightarrow\; 3\cdot\cos t=0 \;\Rightarrow\; t_1=\frac{\pi}{2}\;\;;t_2=\frac{3\cdot\pi}{2}\;.$ *x'(t) ist für beide Werte ungleich 0.*

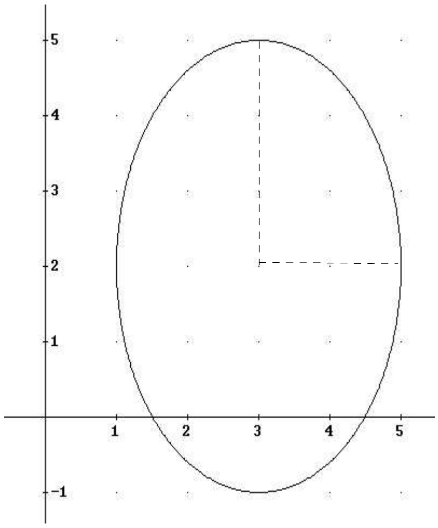
*Koordinaten:* $t_1$ *:(3+0/2+3) = (3/5)*   $t_2$ *: (3+0/2-3) = (3/-1)*

*Der Graph, eine Ellipse, ist auf der nächsten Seite zu sehen.*

*Da die sin- und cos-Funktionen periodisch mit der Periode $2\pi$ sind, wird der vollständige Graph gezeichnet, wenn man alle t-Werte zwischen $t_0$ und $t_0+2\pi$ berücksichtigt, wobei der Wert von $t_0$ beliebig ist. Mit $t_0=0$ muss man beim Integrieren also mit den Grenzen $t_1=0$ und $t_2=2\pi$ rechnen:*

*Die Ableitungen x'(t) und y'(t) sind auf Seite 4 zu finden.*

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x(t)\,y'(t)-x'(t)\,y(t)\right)dt=$$




$$\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left((3+2\cdot\cos t)\cdot(3\cdot\cos t)-(-2\cdot\sin t)\cdot(2+3\cdot\sin t)\right)dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(9\cdot\cos t+6\cdot\cos^2 t+4\cdot\sin t+6\cdot\sin^2 t\right)dt\overset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{=}$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(9\cdot\cos t+4\cdot\sin t+6\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\left[9\cdot\sin t-4\cdot\cos t+6\cdot t\right]_0^{2\pi}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left((0-4+12\pi)-(0-4+0)\right)=\frac{1}{2}\cdot 12\pi=6\pi$$

*Übrigens: Die Fläche einer Ellipse berechnet sich nach der Formel:*
*$\pi$ mal Länge der großen Halbachse mal Länge der kleinen Halbachse, also hier: $\pi\cdot 3\cdot 2=6\pi$*

---

## 4 Ordnen Sie 4 von den 5 Gleichungen eindeutig den 4 Abbildungen zu.

a) $y^2=x^4-x^6$

b) $x\,y^2+3y^2=x^3+1$

c) $y^4+x^4=y^2+x^2$

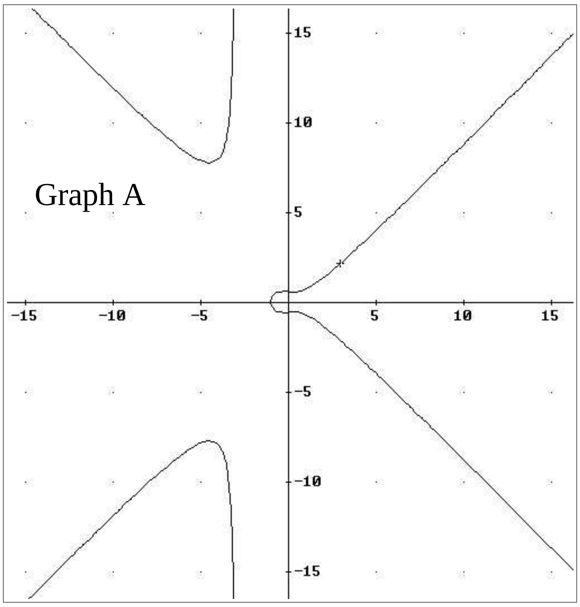
d) $x^2\,y+x\,y^2=2$

e) $y^2=x^5+x^4$

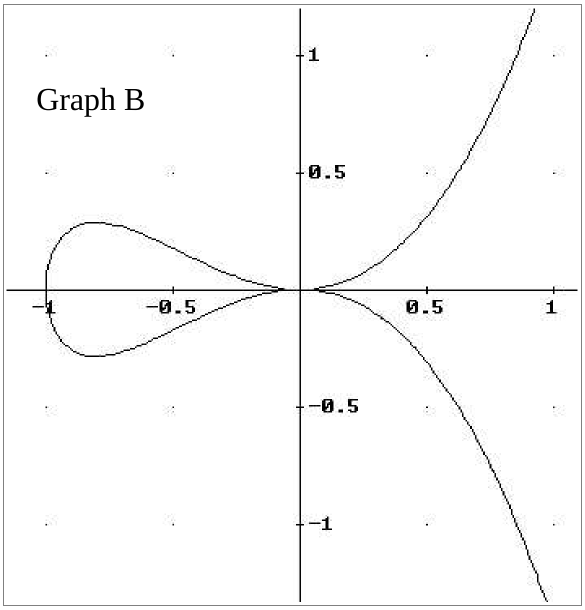
*Lösung:*
*Durch einfaches Einsetzen ergibt sich, dass nur für die Gleichungen a), c) und e) der Punkt (0/0) Teil der Kurve ist. Es gibt aber nur die 2 Kurven B) und C) mit diesem Punkt. Also ist für <u>eine</u> der Gleichungen a), c), e) kein Graph vorhanden. a) und c) sind punktsymmetrisch (mit (x/y) gehört auch (-x/-y) zur Kurve), e) aber nicht (wegen $x^5$). Damit muss e) zu B) gehören.*

*Bei c) kann für x=0  y den Wert 1 annehmen, der Punkt (0/1) gehört aber nicht zum Graph C), also muss die Gleichung a) zu C) gehören.*

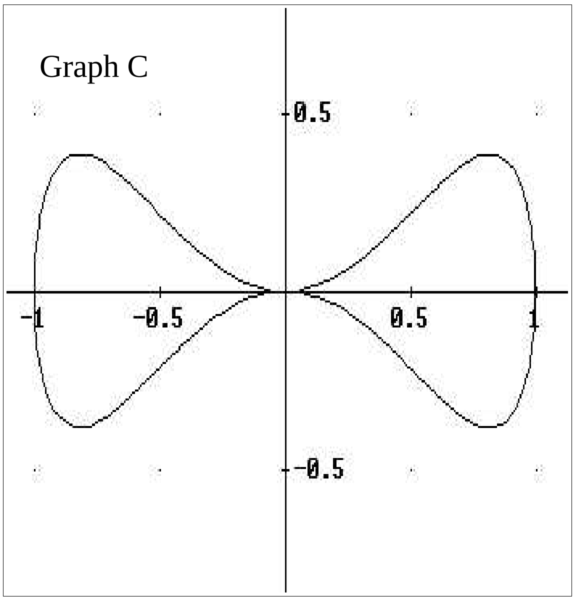
*Es bleiben noch die Gleichungen b) und d) übrig, so wie die Kurven A) und D)*
*Graph D) ist achsensymmetrisch zur 1.Winkelhalbierenden, weil mit (x/y) auch (y/x) zur Kurve gehört, d.h. wenn man in der Gleichung x und y austauscht, muss die Gleichung unverändert bestehen bleiben. Das ist nur bei der Gleichung d) der Fall, also gehört d) zu D).*
*Damit gehört dann notwendigerweise b) zu A)*



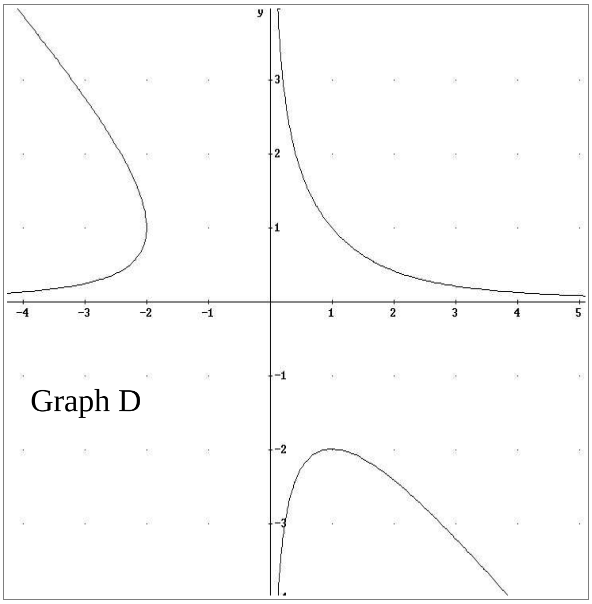

*Gleichung b)*




*Gleichung e)*




*Gleichung a)*




*Gleichung d)*