02.04.2003 Klausur 1 Kurs Ma22 Mathematik Lk

Lösung

1 Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx =$

a) mit Substitutionsmethode

$$z = \cos x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sin x} \cdot dz$$

$$\int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \left(\sin x \cdot z^2 \cdot \frac{-1}{\sin x} \right) dz = \int -z^2 dz = \frac{-z^3}{3} = \frac{-\cos^3 x}{3}$$

b) mit Produktintegration

$$\int \underset{u'}{\sin x} \cdot \underset{v}{\cos^2 x} \, dx = -\underset{u}{\cos x} \cdot \underset{v}{\cos^2 x} - \int \underset{u}{(-\cos x)} \cdot \underset{v'}{(2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x))} dx =$$

$$-\cos^3 x - 2 \cdot \int \sin x \cdot \cos^2 x dx \Rightarrow 3 \cdot \int \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\cos^3 x \Rightarrow \int \sin x \cdot \cos^2 x dx = \frac{-\cos^3 x}{3}$$

---

2 Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx =$

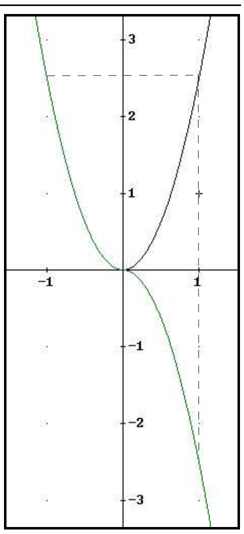
$$x = 2 \cdot \sin z \Rightarrow \frac{dx}{dz} = 2 \cdot \cos z \Rightarrow dx = 2 \cdot \cos z \cdot dz \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cdot \cos z}{\sqrt{4 - 4 \cdot \sin^2 z}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cdot \cos z}{2 \cdot \sqrt{1 - \sin^2 z}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos z}{\sqrt{\cos^2 z}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos z}{\cos z} dz =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 \, dz = [z]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

---

3 Der Graph der Funktion mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2$ rotiere im Bereich $x \in [0,1]$ einmal um die x-Achse und einmal um die y-Achse.
Berechnen Sie das a, für das die Volumina der entstehenden Drehkörper gleich sind.



Drehung um die x-Achse:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 (a \cdot x^2)^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 a^2 \cdot x^4 dx = \left[\pi \cdot a^2 \cdot \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi \cdot a^2}{5}$$

Drehung um die y-Achse:

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \frac{dy}{dx} dx = \pi \cdot \int_0^1 x^2 \cdot (2 \cdot a \cdot x) dx = \pi \cdot \int_0^1 2 \cdot a \cdot x^3 dx = \left[2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi \cdot a}{2}$$

oder wegen $y = a \cdot x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{a}}$ auch

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx = \pi \cdot \int_0^a \frac{y}{a} dy = \left[\frac{\pi \cdot y^2}{2 \cdot a} \right]_0^a = \frac{\pi \cdot a^2}{2 \cdot a} = \frac{\pi \cdot a}{2}$$

Wegen V_x=V_y *gilt*

$$\frac{\pi \cdot a^2}{5} = \frac{\pi \cdot a}{2} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

---

4 Die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sqrt{6x - x^2}$ ist gegeben.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich.

$$x \cdot \sqrt{6x - x^2} = x \cdot \sqrt{x \cdot (6 - x)}$$

Der Term unter der Wurzel ist nur positiv für $x \geq 0$ und $x \leq 6$, d.h. $D_x = \{x \in \Re | 0 \leq x \leq 6\}$

b) Bestimmen Sie an den Rändern des Definitionsbereiches die Funktionswerte und die Steigungen.

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \sqrt{0} = 0 \quad \textit{und} \quad f(6) = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{6 \cdot 6 - 6^2} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{0} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{6x - x^2} + \frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{6 - 2x}{2 \cdot \sqrt{6x - x^2}} = \frac{\sqrt{6x - x^2}}{3} + \frac{3x - x^2}{3 \cdot \sqrt{6x - x^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{6x - x^2}}{3} + \sqrt{\frac{9x^2 - 6x^3 + x^4}{54x - 9x^2}} = \frac{\sqrt{6x - x^2}}{3} + \sqrt{\frac{9x - 6x^2 + x^3}{54 - 9x}}$$

$x \to 0$: $f'(x) \to \frac{\sqrt{0}}{3} + \sqrt{\frac{0}{54}} = 0$

$x \to 6$: $f'(x) \to \frac{\sqrt{6 \cdot 6 - 6^2}}{3} + \sqrt{\frac{54}{54 - 54}} = \frac{0}{3} + \sqrt{\frac{54}{0}} \to \infty$

c) Berechnen Sie die Lage der waagrechten Tangenten.

Aus $f'(x)=0$ folgt:

$$\frac{\sqrt{6x - x^2}}{3} + \frac{3x - x^2}{3 \cdot \sqrt{6x - x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{6x - x^2}}{3} = \frac{x^2 - 3x}{3 \cdot \sqrt{6x - x^2}} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 3x \Rightarrow 9x = 2x^2$$

daraus folgt $x_1 = 0$ und $x_2 = 4{,}5$ mit $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4}$

d) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der sich ergibt, wenn der Graph der Funktion um die x-Achse rotiert.

$$V_x = \pi \cdot \int_0^6 \left(\frac{1}{3} \cdot x \cdot \sqrt{6x - x^2} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^6 \frac{6x^3 - x^4}{9} dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(\frac{2}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{9} \cdot x^4 \right) dx =$$

$$\pi \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{9} \cdot \frac{x^5}{5} \right]_0^6 = \pi \cdot \left(216 - \frac{864}{5} \right) = \pi \cdot \frac{1080 - 864}{5} = \frac{216}{5} \cdot \pi$$

---

5 Gegeben ist eine Funktionsschar durch die Gleichung $f_a(x) = 5 \cdot \frac{e^x - a}{e^{2x}}$.

a) Berechnen Sie, wo die Graphen der Schar die Koordinatenachsen schneiden.

Nullstellen-Bedingung $f_a(x) = 0$ liefert $e^x - a = 0$, *also* $e^x = a$ und $x = \ln a$

Aus $x = 0$ ergibt sich $f_a(0) = 5 - 5a$ als y-Achsenabschnitt

b) Untersuchen Sie, für welche Werte von a es waagrechte Tangenten und für welche Werte von a es Wendepunkte gibt.

$$f_a(x) = 5 \cdot \frac{e^x - a}{e^{2x}} = \frac{5}{e^x} - \frac{5a}{e^{2x}} = 5 \cdot e^{-x} - 5 \cdot a \cdot e^{-2x}$$

$$f_a'(x) = -5 \cdot e^{-x} + 10 \cdot a \cdot e^{-2x}$$

Bedingung für waagrechte Tangenten ist $f_a'(x) = 0$, also:

$$-5 \cdot e^{-x} + 10 \cdot a \cdot e^{-2x} = 0 \Rightarrow 5 \cdot e^{-x} = 10 \cdot a \cdot e^{-2x} \Rightarrow 1 = 2 \cdot a \cdot e^{-x} \Rightarrow e^x = 2a \Rightarrow x = \ln 2a$$

Es gibt also nur für a>0 waagrechte Tangenten, weil sonst der Logarithmus nicht definiert wäre.

$$f_a''(x) = +5 \cdot e^{-x} - 20 \cdot a \cdot e^{-2x}$$

Bedingung für Wendepunkte ist $f_a''(x) = 0$, also:

$$+5 \cdot e^{-x} - 20 \cdot a \cdot e^{-2x} = 0 \Rightarrow 5 \cdot e^{-x} = 20 \cdot a \cdot e^{-2x} \Rightarrow 1 = 4 \cdot a \cdot e^{-x} \Rightarrow e^x = 4a \Rightarrow x = \ln 4a$$

Es gibt also nur für a>0 Wendepunkte, weil sonst der Logarithmus nicht definiert wäre.

c) Vereinfacht man die Ableitungsterme, so erkennt man, dass sie alle nach einem bestimmten Schema aufgebaut sind. Suchen Sie unter diesem Gesichtspunkt eine Formel für die n-te Ableitung.

1. Die Vorzeichen beider Summanden ändern sich bei jeder Ableitung.

2. Der Koeffizient des zweiten Summanden verdoppelt sich bei jeder Ableitung.

Daraus folgt: $f_a^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 5 \cdot e^{-x} - (-1)^n \cdot 5 \cdot 2^n \cdot a \cdot e^{-2x} = (-1)^n \cdot 5 \cdot e^{-x} \cdot \left(1 - 2^n \cdot a \cdot e^{-x}\right)$

d) Zeigen Sie (falls noch nicht geschehen), dass die 1. Ableitung so geschrieben werden kann: $f_a'(x) = -5 \cdot e^{-x} + 10 \cdot a \cdot e^{-2x}$. Bestimmen Sie die Ortskurve aller Punkt mit waagrechter Tangente.

Herleitung der 1. Ableitung unter b).

Waagrechte Tangenten liegen bei $x = \ln 2a$, d.h. $a = \frac{1}{2} \cdot e^x$. Daraus folgt:

$$f_a(x_{waag.T.}) = 5\cdot e^{-x} - 5\cdot a\cdot e^{-2x} = 5\cdot e^{-x} - 5\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{x}\cdot e^{-2x} = 5\cdot e^{-x} - \frac{5}{2}\cdot e^{-x} = \frac{5}{2}\cdot e^{-x} = \frac{5}{2\cdot e^{x}}$$

e) Einige Kurven der Schar schließen mit den Koordinatenachsen 2 Teilflächen ein. Berechnen Sie das a, für das diese beiden Teilflächen gleichen Flächeninhalt haben.

Wenn diese Teilflächen existieren, dann befindet sich die erste zwischen x=0 und der Nullstelle und die zweite zwischen Nullstelle und +∞, falls die Nullstelle bei x>0 ist oder zwischen x=0 und +∞, falls die Nullstelle bei x<0 ist.

$$\int f_a(x)dx = \int\left(5\cdot e^{-x} - 5\cdot a\cdot e^{-2x}\right)dx = -5\cdot e^{-x} + \frac{5}{2}\cdot a\cdot e^{-2x} = f_a^{(-1)}(x)$$

$$\int_0^\infty f_a(x)\,dx = \left[-5\cdot e^{-x} + \frac{5}{2}\cdot a\cdot e^{-2x}\right]_0^\infty = 0 - \left(-5 + \frac{5}{2}\cdot a\right) = 5 - 2{,}5\cdot a$$

, falls ln a < 0 , d.h. 0 < a < 1

$$\int_{\ln a}^0 f_a(x)\,dx = \left[-5\cdot e^{-x} + \frac{5}{2}\cdot a\cdot e^{-2x}\right]_{\ln a}^0 = \left(-5 + \frac{5}{2}\cdot a\right) - \left(\frac{-5}{a} + \frac{5a}{2a^2}\right) = -5 + \frac{5a}{2} + \frac{5}{a} - \frac{5}{2a} =$$

$$-5 + \frac{5a}{2} + \frac{10-5}{2a} = -5 + \frac{5a}{2} + \frac{5}{2a}$$, falls ln a < 0 , d.h. 0 < a < 1

$$\int_0^{\ln a} f_a(x)dx = +5 - \frac{5a}{2} - \frac{5}{2a}$$, falls ln a > 0 , d.h. a > 1

$$\int_{\ln a}^\infty f_a(x)\,dx = \left[-5\cdot e^{-x} + \frac{5}{2}\cdot a\cdot e^{-2x}\right]_{\ln a}^\infty = 0 - \left(\frac{-5}{a} + \frac{5a}{2a^2}\right) = \frac{5}{a} - \frac{5}{2a} = \frac{10-5}{2a} = \frac{5}{2a}$$,

falls ln a > 0 , d.h. a > 1.

Für ln a < 0, d.h. 0 < a < 1 sind beide Flächen positiv orientiert, d.h. es muss gelten:

$$\int_{\ln a}^0 f_a(x)dx = \int_0^\infty f_a(x)dx \Rightarrow -5 + \frac{5a}{2} + \frac{5}{2a} = 5 - \frac{5a}{2} \Rightarrow -10 + 5a + \frac{5}{2a} = 0 \Rightarrow -20a + 10a^2 + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - 2a + 0{,}5 = 0 \Rightarrow a_{11,12} = 1 \pm \sqrt{1-0{,}5}\ und\ \ wegen\, 0 < a < 1 : a_1 = 1 - \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}29$$

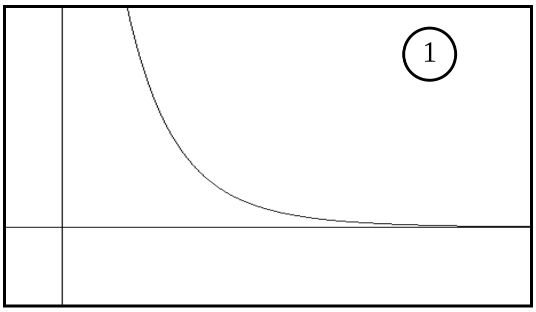
Für ln a > 0 ist die linke Fläche negativ, die rechte positiv orientiert, d.h. es muss gelten:

$$-\int_0^{\ln a} f_a(x)dx = \int_{\ln a}^\infty f_a(x)dx \Rightarrow -\left(+5 - \frac{5a}{2} - \frac{5}{2a}\right) = \frac{5}{2a} \Rightarrow -5 + \frac{5a}{2} = 0 \Rightarrow 5a = 10 \Rightarrow a_2 = 2$$

f) Auf den Seiten 4 und 5 sehen Sie 5 Graphen. 4 davon gehören zu der Kurvenschar. Geben Sie zu jedem Graph an, für welche a-Werte die Kurven einen entsprechenden Verlauf haben und begründen Sie, warum der 5. Graph nicht zu der Kurvenschar gehören kann.

Dieser Graph gehört nicht zur Kurvenschar, weil er (anscheinend) die y-Achse nicht schneidet.
Da $f_a(0)$ = 5-5a, schneidet aber jede Kurve diese Achse.

(Falls die y-Achse aber doch außerhalb des Bildes geschnitten würde, würde für den a-Wert dieser Kurve gelten: a < 0, weil dann weder Nullstelle noch waagrechte Tangente noch Wendepunkt vorhanden wären.)

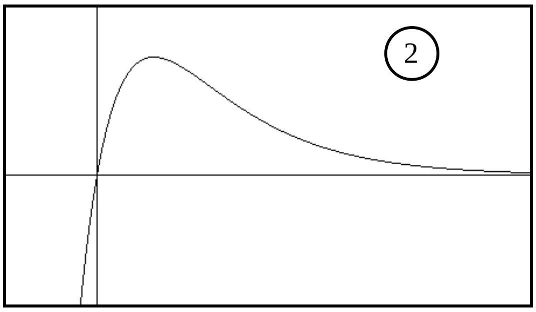


Hier liegt ein Sonderfall vor, da die Kurve durch den Nullpunkt verläuft.
Das geht nur, wenn $f_a(0) = 5\text{-}5a = 0$, also wenn $5 = 5a$,
d.h. wenn $a = 1$.

Nullstelle bei $x_N = \ln a$, d.h. bei $x_N = \ln 1 = 0$

Die waagrechte Tangente liegt dann bei $\ln 2a = \ln 2$

Der Wendepunkt liegt bei $\ln 4a = \ln 4$



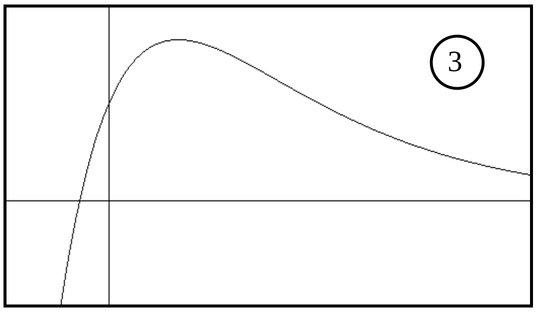
Für die Nullstelle gilt: $x < 0$, d.h. $\ln a < 0$
d.h. $0 < a < 1$

Für den Hochpunkt gilt: $x > 0$, d.h. $\ln 2a > 0$
d.h. $a > 0{,}5$

Für den Wendepunkt gilt: $x > 0$, d.h. $\ln 4a > 0$
d.h. $a > 0{,}25$

Es gilt $f(0) > 0$, d.h. $5 - 5a > 0$
d.h. $a < 1$

Falls $0{,}5 < a < 1$, treffen alle Bedingungen zu.



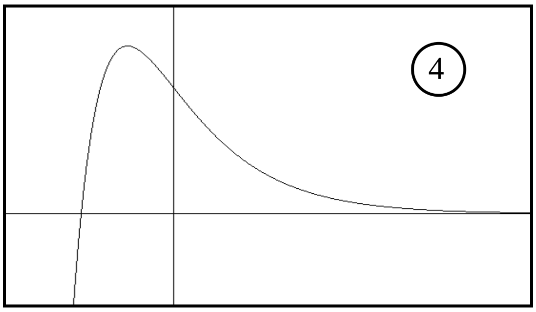
Für die Nullstelle gilt: $x < 0$, d.h. $\ln a < 0$
d.h. $0 < a < 1$

Für den Hochpunkt gilt: $x < 0$, d.h. $\ln 2a < 0$
d.h. $0 < a < 0{,}5$

Für den Wendepunkt gilt: $x > 0$, d.h. $\ln 4a > 0$
d.h. $a > 0{,}25$

Es gilt $f(0) > 0$, d.h. $5 - 5a > 0$
d.h. $a < 1$

Falls $0{,}25 < a < 0{,}5$, treffen alle Bedingungen zu.



Für die Nullstelle gilt: $x > 0$, d.h. $\ln a > 0$, d.h. $a > 1$

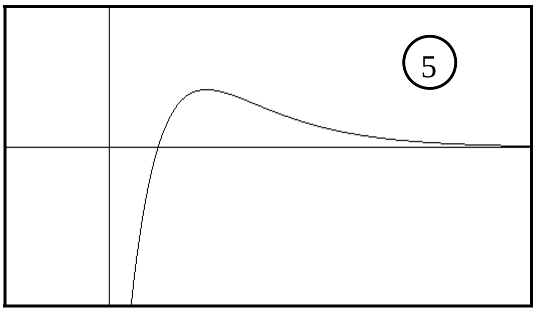
Für den Hochpunkt gilt: $x > 0$, d.h. $\ln 2a > 0$,
d.h. $a > 0{,}5$

Für den Wendepunkt gilt: $x > 0$, d.h. $\ln 4a > 0$,
d.h. $a > 0{,}25$

Es gilt $f(0) < 0$, d.h. $5 - 5a < 0$, d.h. $a > 1$

Falls $a > 1$, treffen alle Bedingungen zu.

(Falls die Kurve die y-Achse nicht schneiden würde,
würde natürlich auch dieser Graph nicht zur Kurvenschar gehören)



Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben !