04.12.2002 Klausur 2 Kurs MA21 Mathematik Lk

Lösung

1 Berechnen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren eine Nullstelle der Funktion $f(x)=18x^3-45x^2-29x+84$. Beginnen Sie mit dem Startwert -2.

Lösung:

Näherungswerte:
-2
-1,504087193
-1,349044937
-1,333485526
-1,333333348
-1,333333333

Benutzt wird die Formel $x \leftarrow x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ *mit* $f'(x)=54x^2-90x-29$.

Dann gilt $x \leftarrow x-\frac{18x^3-45x^2-29x+84}{54x^2-90x-29}=\frac{36x^3-45x^2-84}{54x^2-90x-29}$.

Der konstante Wert -1,333333333 legt die Vermutung nahe, dass eine Nullstelle bei -4/3 liegt.

---

2 Beweisen Sie mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion: „3 ist ein Teiler des Terms n^3+5n für alle $n \in N$ “.

Lösung:

1. Überprüfung für n=0: 0:3=0 , Aussage also gültig.
2. Annahme: Aussage gilt für n=k, also „3 ist ein Teiler des Terms k^3+5k*“*
3. zu zeigen: Die Aussage gilt auch für n=k+1, d.h. „3 ist ein Teiler des Terms $(k+1)^3+5(k+1)$*“*
Beweis: $(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+5k+5=k^3+5k+3k^2+3k+6=(k^3+5k)+3(k^2+k+2)$
Die erste Klammer ist laut Annahme durch 3 zu teilen, der 2.Summand ist durch 3 zu teilen, weil eine 3 als Faktor vor der Klammer steht. Damit ist der ganze Term durch 3 zu teilen. q.e.d.

---

3 Gegeben sind die beiden Kurvenscharen mit den Gleichungen $f_a(x)=-a\cdot x^2+a^5$ und $g_a(x)=-\frac{x^2}{a}+a^3$ mit *a>0*. Für jedes a schließen die Kurven von *f(x)* und *g(x)* ein Flächenstück vollkommen ein.

a) Geben Sie an, was das Besondere an der Lage all dieser Flächenstücke ist.

Lösung:

Berechnung der Schnittpunkte der beiden Kurven:

$$-a\cdot x^2+a^5=-\frac{x^2}{a}+a^3 \Rightarrow -a^2\cdot x^2+a^6=-x^2+a^4 \Rightarrow x^2\cdot(1-a^2)=a^4\cdot(1-a^2) \Rightarrow x^2=a^4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm a^2$$

Sonderfall $a^2=1$ *(man darf dann nicht durch* $(1-a^2)$ *teilen) :* $f_1(x)=-x^2+1$ *;* $f_2(x)=-x^2+1$ *. Die Kurven sind dann identisch, d.h. der Flächeninhalt ist 0.*
Für $a\neq 1$ *sind die Schnittpunkte immer bei* $\pm a^2$*.Funktionswerte:* $f_a(\pm a^2)=-a^5+a^5=0$ *;* $g_a(\pm a)=-a^3+a^3=0$*.*
Das Besondere ist also, dass die beiden Parabeln sich immer in zwei Punkten auf der x-Achse schneiden.

---

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Flächen in Abhängigkeit von a.

(Ergebnis: $A(a)=\frac{4}{3}\cdot a^5-\frac{4}{3}\cdot a^7$)

Lösung:

Die Grenzen des Integrals wurden unter a) berechnet.

$$\int_{-a^2}^{+a^2}\left(-a\cdot x^2+a^5+\frac{x^2}{a}-a^3\right)dx=\left[-\frac{a}{3}\cdot x^3+a^5\cdot x+\frac{1}{3\cdot a}\cdot x^3-a^3\cdot x\right]_{-a^2}^{+a^2}=$$

$$\left(-\frac{a^7}{3}+a^7+\frac{a^5}{3}-a^5\right)-\left(+\frac{a^7}{3}-a^7-\frac{a^5}{3}+a^5\right)=2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot a^7-\frac{2}{3}\cdot a^5\right)=\frac{4}{3}\cdot a^7-\frac{4}{3}\cdot a^5$$

Für 0<a<1 ist dieser Term negativ, für a>1 positiv (und für a=0 ist er gleich 0 s.o.).
Also gilt $A(a)=4/3\cdot a^5-4/3\cdot a^7$ für 0<a<1 und $A(a)=4/3\cdot a^7-4/3\cdot a^5$ für a>1.

---

c) Berechnen Sie, für welchen a-Wert zwischen 0 und 1 die Fläche maximalen Inhalt hat.

Lösung:

Extremwertaufgabe: A(a) ableiten und gleich 0 setzen:

$$A'(a)=\frac{20}{3}\cdot a^4-\frac{28}{3}\cdot a^6\overset{!}{=}0\Rightarrow 20\cdot a^4=28\cdot a^6\Rightarrow 4\cdot a^4\cdot\left(7\cdot a^2-5\right)=0\Rightarrow a^2=\frac{5}{7}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{5}{7}}\approx 0{,}845$$

Erläuterungen:
Wegen A(0)=0 kann die Fläche für a=0 nicht maximal sein. Negative a-Werte sind nicht gefragt.
Da A(0)=0 und A(1)=0 muss zwischen 0 und 1 ein Maximum liegen, also gilt a≈0,845 mit

$$A\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{5^2}{7^2}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}-\frac{4}{3}\cdot\frac{5^3}{7^3}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}=\frac{100}{147}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\left(1-\frac{5}{7}\right)=\frac{200}{1029}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}\approx 0{,}164$$

---

d) Untersuchen Sie, ob für andere a-Werte größere Flächeninhalte vorkommen und geben Sie, wenn möglich, den maximalen Flächeninhalt an.

Lösung:

Für $x\to\pm\infty$ wachsen die Flächeninhaltswerte ins Unendliche. Es gibt also größere Flächeninhalte, ein maximaler Flächeninhalt (bezogen auf alle möglichen a-Werte) lässt sich aber nicht angeben.

---

4 Der Graph der Funktion mit der Gleichung $f(x)=\frac{2ax+b}{1+x^2}$ soll für *x=3* eine waagrechte Tangente besitzen und durch den Punkt *P(0/4)* verlaufen.
Berechnen Sie die Werte für a und b.

Lösung:

Benötigt wird die Ableitung von f(x):

$$f'(x)=\frac{2a\cdot\left(1+x^2\right)-\left(2ax+b\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2a+2ax^2-4ax^2-2bx}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{-2ax^2-2bx+2a}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Bedingungen:
f'(3)=0 wegen der waagrechten Tangente bei x=3
f(0)=4 wegen des Punktes (0/4)

$$f'(3)=\frac{-18a-6b+2a}{100}=\frac{-16a-6b}{100}=0\Rightarrow 16a=-6b\Rightarrow a=-\frac{6}{16}b=-\frac{3}{8}b$$

$f(0)=\frac{b}{1}=b=4$ *Es gilt also* $a=-\frac{3}{8}b=-\frac{3}{8}\cdot 4=-\frac{3}{2}$ *. Lösung: a=-1,5 ; b=4*

---

5 Gegeben ist die Kurvenschar mit der Gleichung $f_t(x) = x^3 - t \cdot x + 2$.

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von t die gesamte Fläche, die von der Kurve und der Normalen im Wendepunkt vollständig eingeschlossen wird. Stammfunktion: $F(x) = \dfrac{x^2 \cdot \left(t \cdot x^2 - 2 \cdot (t^2+1)\right)}{4 \cdot t}$

Lösung:

Für den Wendepunkt benötigt man die 2. Ableitung: $f_t'(x)=3x^2-t$; $f_t''(x)=6x$

Für den Wendepunkt gilt $f''(x)=0$, also $6x=0$, also $x=0$.

Für die Normalengleichung braucht man zunächst die Steigung der Tangente bei $x=0$: $f_t'(0)=-t$.

Die Steigung der Normalen ist gleich dem negativen Kehrwert der Tangentensteigung: $m_N=-1/m_T=1/t$

Vorläufige Normalengleichung: $y=1/t \cdot x+c$.

Berechnung von c durch Einsetzen der Koordinaten für $x=0$: $(0/2) \Rightarrow 2=c \Rightarrow y=1/t \cdot x+2$

Schnittpunktbestimmung von Parabel und Normalen durch Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$x^3 - t \cdot x + 2 = \frac{1}{t} \cdot x + 2 \Rightarrow x^3 - t \cdot x - \frac{1}{t} \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x^2 - t - \frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x^2 - \frac{t^2+1}{t}\right) = 0$$

Es ergeben sich also die Lösungen $x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{\dfrac{t^2+1}{t}} \quad x_3 = -\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t}}$

Wegen $f_t(x)=-f_t(-x+2u)+2v$ mit $u=0$ und $v=2$, d.h. $f_t(x)=-f_t(-x)+4=-(-x^3+tx+2)+4=x^3-tx+2$ ist die Kurve symmetrisch zu (0/2), d.h. der Wert des Flächeninhalts ist doppelt so groß wie der der Fläche zwischen den beiden Kurven im Bereich $[x_1,x_2]$.

$$\int_0^{\sqrt{\frac{t^2+1}{t}}} \left(+\frac{1}{t} \cdot x + 2 - x^3 + t \cdot x - 2\right) dx = \int_0^{\sqrt{\frac{t^2+1}{t}}} \left(+\frac{1}{t} \cdot x - x^3 + t \cdot x\right) dx = \left[+\frac{1}{2t} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{t}{2} \cdot x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{t^2+1}{t}}} =$$

$$+\frac{1}{2t} \cdot \frac{t^2+1}{t} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{t^2+1}{t}\right)^2 + \frac{t}{2} \cdot \frac{t^2+1}{t} = +\frac{t^2+1}{2t^2} - \frac{t^4+2t^2+1}{4t^2} + \frac{t^3+t}{2t} = \frac{+2t^2+2-t^4-2t^2-1+2t^4+2t^2}{4t^2} =$$

$$\frac{+t^4+2t^2+1}{4t^2}$$

Gesamter Wert also $A(t) = 2 \cdot \dfrac{+t^4+2t^2+1}{4t^2} = \dfrac{+t^4+2t^2+1}{2t^2} = \dfrac{(t^2+1)^2}{2t^2} = +\dfrac{t^2}{2} + 1 + \dfrac{1}{2t^2}$

---

b) Berechnen Sie, für welches t der Flächeninhalt minimal wird.

Lösung:

A(t) aus Aufgabe a) ableiten und gleich 0 setzen:

$$A'(t) = t - \frac{1}{t^3} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t = \frac{1}{t^3} \Rightarrow t^4 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

Überprüfung auf Minimum:

$$A''(t) = 1 + \frac{3}{t^4} > 0 \text{ für alle } t$$

Minimale Fläche: $A(\pm 1)=1/2+1+1/2=2$

---

c) Berechnen Sie die Gleichung der Ortskurve aller Punkte mit waagrechter Tangente.

Lösung:

Bedingung für waagrechte Tangente ist $f'(x)=0$, also $f'(x) = 3x^2 - t \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{t}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{t}{3}}$

bzw. $t=3x^2$.

Für die Funktionswerte und gleichzeitig für die Ortskurve gilt damit $f(x)=x^3-3x^3+2=-2x^3+2$

---

d) Bestimmen Sie den Ort aller Wendepunkte der Kurvenschar.

Lösung:

Für alle Wendepunkte hat sich die x-Koordinate 0 und unabhängig von t die y-Koordinate 2 ergeben, d.h. alle Wendepunkte liegen im Punkt (0/2).

---

6 Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

a) Zeigen Sie, dass die Fläche zwischen Kurve und x-Achse imBereich [1;∞[keinen endlichen Flächeninhalt besitzt.

Lösung:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}dx = \left[\frac{x^{+\frac{1}{4}}}{+\frac{1}{4}}\right]_1^\infty = \left[4\cdot\sqrt[4]{x}\right]_1^\infty = "\infty" - 4$$

,d.h. kein endlicher Flächeninhaltswert.

---

b) Zeigen Sie, dass das Rotationsvolumen, bei dem die Kantenfunktion durch *f(x)* und die Grenzen *x=1* und *x=∞* gegeben ist, ein endliches Volumen besitzt, indem Sie das Volumen berechnen.

Lösung:

$$\pi\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^2 dx = \pi\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx = \pi\cdot\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^\infty = \pi\cdot\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^\infty = \pi\cdot\left(0-(-2)\right) = 2\cdot\pi$$

Also: V=2π

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Klausur !!!