11.09.2002 Klausur 1 Kurs MA21 Mathematik Lk

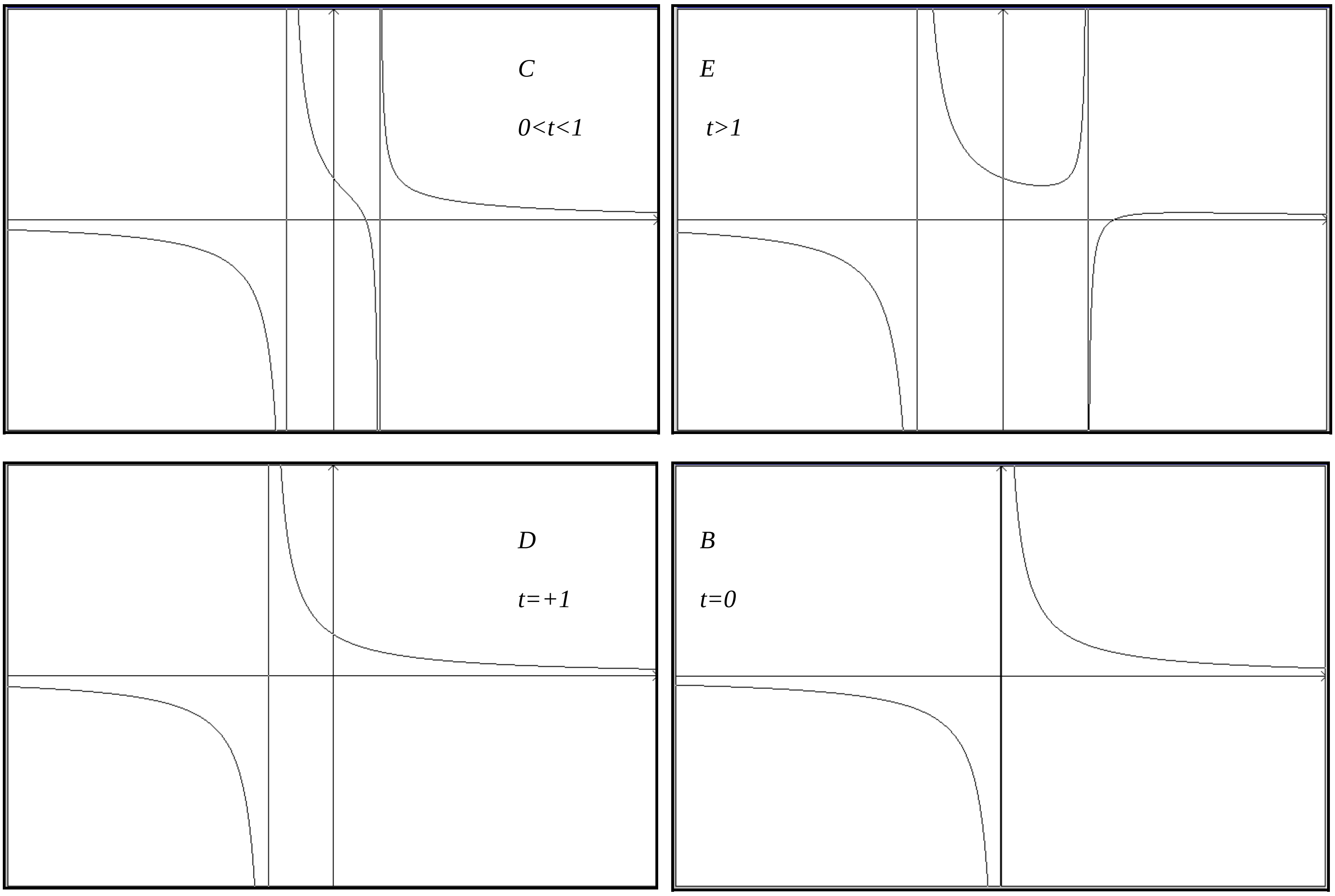
Lösungsblatt *(Lösungen in kursiver Schrift)*

1 Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \dfrac{x-t}{x^2-t}$.

a) Die folgenden vier Graphen zeigen Kurven dieser Schar. Dabei ist t jeweils aus einem der fünf folgenden Bereiche entnommen:

A) $t < 0$ B) $t = 0$ C) $0 < t < 1$ D) $t = 1$ E) $t > 1$

Ordnen Sie vier der fünf Buchstaben A, B, C, D und E den richtigen Graphen zu und begründen Sie Ihre Wahl so, dass sie eindeutig ist.



Nullstellen liegen bei x=t (Zähler 0 setzen)

Polstellen liegen bei $x = \pm\sqrt{t}$ *(Nenner 0 setzen)*

Spezialfälle: t=0 und t=1:

t=0 $\Rightarrow f_0(x) = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$ *, also Normalhyperbel mit x-Achse und y-Achse als Asymptoten. Dieser Fall trifft genau auf Abbildung rechts unten zu.*

t=1 $\Rightarrow f_1(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$ *, also Normalparabel um 1 nach links verschoben und mit Lücke bei x=1. Dieser Fall trifft genau auf die Abbildung links unten zu.*

Für t<0 gibt es keine Polstellen, weil dann der Nenner nicht zu 0 werden kann.
Da alle gezeichneten Kurven wenigstens eine Polstelle haben, kommt eine Kurve diesen Typs (t<0) also nicht vor.

Wenn t>1, dann gilt $\sqrt{t} < t$ *, d.h. die Nullstelle liegt rechts von der rechten Polstelle.*
Dieser Sachverhalt trifft nur auf die Kurve oben rechts zu.

Wenn t<1, dann gilt $\sqrt{t} > t$ *, d.h. die Nullstelle liegt links von der rechten Polstelle.*
Dieser Sachverhalt trifft nur auf die Kurve oben links zu.

---

b) Verschaffe Sie sich einen Überblick über den Kurvenverlauf des Graphen für $t = -1$, indem Sie für diesen Wert die Funktionsgleichung auf die Existenz und ggf. die Werte von Nullstellen, Polstellen, Asymptoten und Lage der Extrema untersuchen. Skizzieren Sie auf Grund Ihrer Überlegungen den Graph für $t = -1$.

$f_{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ *Nullstelle bei* $x = -1$ *, Polstellen gibt es nicht, weil* $x^2 + 1 > 0$ *für alle x.*
Senkrechte Asymptoten kommen also nicht vor.

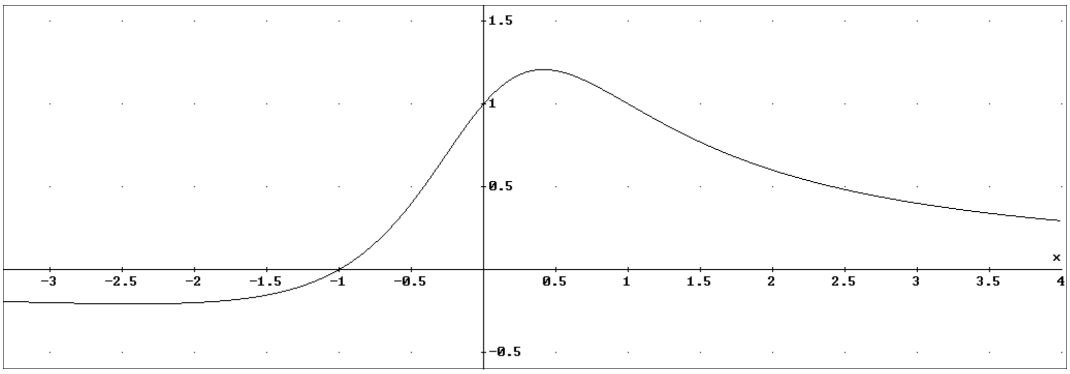
Da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1}{x^2+1} = 0$ *ist die x-Achse eine waagrechte Asymptote.*

Extrema: $f_{-1}'(x) = \dfrac{x^2+1-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

$f_{-1}'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$ *also* $x_1 \approx 0{,}4142$, $x_2 \approx -2{,}4142$

Eingesetzt in $f_{-1}(x)$ *ergeben sich* $f_{-1}(x_1) \approx 1{,}2071$ *und* $f_{-1}(x_2) \approx -0{,}2071$.

$f_{-1}(0)=1$



---

c) Suchen Sie rechnerisch nach Kurven dieser Schar, die im Punkt (1/1) die Steigung 1 besitzen und geben Sie ggf. deren t-Werte an.

$$f_t'(x) = \frac{(x^2-t)-(x-t)\cdot 2x}{(x^2-t)^2} = \frac{x^2-t-2x^2+2tx}{(x^2-t)^2} = \frac{-x^2+2tx-t}{(x^2-t)^2}$$

Koordinaten für Punkt (1/1) in $f_t(x)$ *einsetzen:* $1 = \dfrac{1-t}{1-t}$ *, das gilt für alle t außer t=1.*

Steigung 1: (1/1) in $f_t'(x)$ *einsetzen:* $1 = \dfrac{-1+2t-t}{(1-t)^2} \Rightarrow 1 - 2t + t^2 = -1 + t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$

daraus folgt: $t_{1,2} = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{9}{4} - \dfrac{8}{4}} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{1}{2}$ *, also* $t_1 = \dfrac{4}{2} = 2$ *und* $t_2 = \dfrac{2}{2} = 1$

Die Lösung t_2 *entfällt, da dafür der Nenner den Wert 0 hätte.*

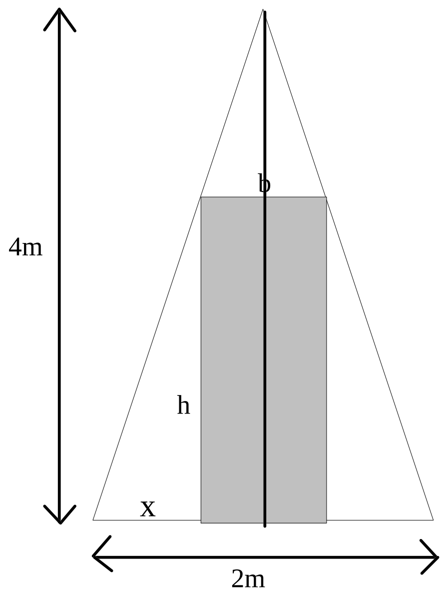
2 Leiten Sie die Funktion $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ mit Hilfe des Differenzenquotienten ab.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x_0 + h)^2 - 4(x_0 + h) + 6 - 2x_0^{\ 2} + 4x_0 - 6}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2x_0^{\ 2} + 4x_0 h + 2h^2 - 4x_0 - 4h + 6 - 2x_0^{\ 2} + 4x_0 - 6}{h} = \lim_{h \to 0}(4x_0 + 2h - 4) = 4x_0 - 4$$

---

3 An der Seitenwand eines Spitzbodens soll ein Schrank mit möglichst großem Volumen installiert werden.
Die größte Höhe des Zimmers beträgt 4m, der Boden ist unten 2m breit.
Berechnen Sie die Höhe h und die Breite b des Schrankes so, dass er maximales Volumen erhält.
Ein Tipp: Verwenden Sie zur Berechnung die Größe x, die den Abstand des Schrankes von der unteren linken Zimmerecke angibt.



Nach dem Strahlensatz gilt: $\frac{x}{h} = \frac{1}{4} \Rightarrow h = 4x$

Weiter gilt b=2-2x.

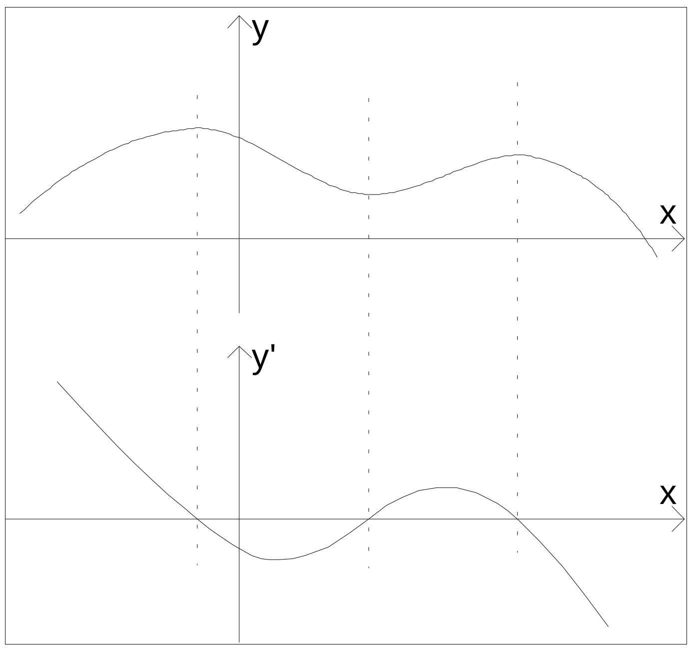
Für die Querschnittsfläche des Schranks gilt dann:

$A(h,b) = h \cdot b = 4x \cdot (2 - 2x) = 8x - 8x^2 = A(x)$.

Unter der Annahme, dass die Schranktiefe konstant bleibt, findet man die maximale Querschnittsfläche aus A'(x)=0: $A'(x) = 8 - 16x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ *. A´´(x)=-16<0, also Maximum.*
h=4x=2 und b=2-2x=1.

---

4 Leiten Sie die nebenstehend skizzierte Funktion graphisch ab.



Viel Erfolg bei der Bearbeitung !!!