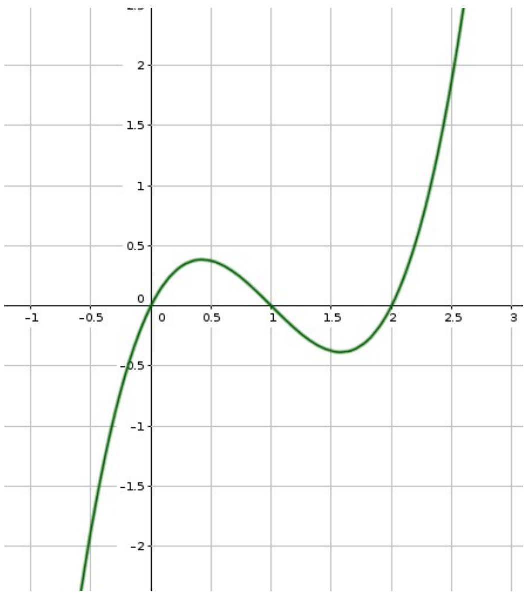
Lösung

Hilfsmittelfreier Teil

1 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=x^3-3x^2+2x$.



1.1 Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Verbindungsgerade von Hoch- und Tiefpunkt des Funktionsgraphen durch den Punkt (1/0) verläuft.

f ist eine Funktion 3. Grades, der Graph ist also punktsymmetrisch und der Wendepunkt ist der Symmetriepunkt.
Berechnung des Wendepunktes (nicht verlangt):
$f'(x)=3x^2-6x+2 \rightarrow f''(x)=6x-6$
Wendepunkt: $f''(x)=0 \rightarrow 6x-6=0 \rightarrow x=1$
Der Punkt (1/0) ist also der Symmetriepunkt.
Da die Extrema punktsymmetrisch liegen, muss die Verbindungslinie zwischen den Extrema durch den Spiegelpunkt, also durch (1/0) verlaufen.

1.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Flächen, die von Funktionsgraph und x-Achse vollständig eingeschlossen werden.

Berechnung der Nullstellen: $f(x)=0 \rightarrow x^3-3x^2+2x=0 \rightarrow x\cdot(x^2-3x+2)=0 \rightarrow x_1=0$

$$x^2-3x+2=0 \rightarrow x_{2,3}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2} \rightarrow x_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2 \;;\; x_3=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Wegen der Symmetrie reicht es, die Fläche zwischen x=0 und x=1 zu berechnen:

$$A_1=\int_0^1 x^3-3x^2+2x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}$$

Der Flächeninhalt zwischen x=1 und x=2 beträgt wegen der Symmetrie auch $\frac{1}{4}$.

Die gesamte Fläche hat also den Flächeninhalt $A_{gesamt}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

1.3 Es soll gelten $\int_{-0,5}^{z}(x^3-3x^2+2x)\,dx=0$.
Geben Sie einen passenden z-Wert mit Begründung ohne Rechnung an.

Da der Graph punktsymmetrisch ist, sind die Flächenteile zwischen Graph und x-Achse links vom Symmetriepunkt genau so groß wie die entsprechenden Teile rechts vom Symmetriepunkt. Nur die Orientierung (Vorzeichen) unterscheidet sich. Daher hat ein Integral, dessen Grenzen symmetrisch zum Symmetriepunkt liegen, den Wert 0. Zur Stelle x=-0,5 liegt symmetrisch x= +2,5. Für z=2,5 hat das Integral also den Wert 0.

1.4 Zeigen Sie, dass die Gerade, die die Kurve im Nullpunkt senkrecht schneidet, die Gleichung $g(x)=-\frac{1}{2}\cdot x$ besitzt.

Zunächst muss die Steigung im 0-Punkt berechnet werden: $f'(x)=3x^2-6x+2 \rightarrow f'(0)=2$.

Senkrecht zur Steigung 2 ist die Steigung $-\frac{1}{2}$ *(inverser Kehrwert). Da der Koordinatenursprung den y-Achsenabschnitt 0 besitzt, ist also die Gerade mit der Gleichung* $g(x)=-\frac{1}{2}\cdot x$ *die gesuchte Gerade.*

1.5 Berechnen Sie den x-Wert, an dem die Differenz der Funktionswerte von f(x) und g(x) für x>1 am kleinsten ist.

Die Funktion $d(x)=f(x)-g(x)$ *gibt die Differenz zwischen den beiden Funktionen an. Diese Differenz soll minimal werden:* $d'(x)=f'(x)-g'(x)=3x^2-6x+2+\frac{1}{2}=3x^2-6x+\frac{5}{2}\overset{!}{=}0$ →

$x^2-2x+\frac{5}{6}=0$ → $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\frac{5}{6}}=1\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$

Da x>1, kommt nur die Stelle $1+\sqrt{\frac{1}{6}}$ *in Frage.*

$f''(x)=6x-6$ → $f''\left(1+\sqrt{\frac{1}{6}}\right)=6+6\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}-6=6\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}>0$ → *Minimum*

---

2 Man würfelt gleichzeitig mit einem Tetraeder-Würfel (W4: 1, 2, 3, 4) und einem Hexaeder-Würfel (W6: 1, 2, 3, 4, 5, 6) und bildet die Summe der gewürfelten Augenzahl.

2.1 Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit mit einem W6-Würfel eine 6 zu werfen genau so groß ist wie mit den beiden Würfeln die Augensumme 6 zu erhalten und dass die Wahrscheinlichkeit mit einem W6-Würfel eine 5 zu werfen genau so groß ist wie mit den beiden Würfeln die Augensumme 5 zu erhalten.

Es gilt $p(6)=p(5)=\frac{1}{6}$.

Augensumme 6 kommt 4-mal vor: (W4/W6) (1/5) (2/4) (3/3) (4/2)
Augensumme 5 kommt auch 4-mal vor: (W4/W6) (1/4) (2/3) (3/2) (4/1)
Folglich sind die Wahrscheinlichkeiten für die Augensummen 5 und 6 gleich.

Es gibt 4x6=24 verschiedene Würfe.

Daraus folgt $p(Augensumme 6)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$ *und* $p(Augensumme 5)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$ *, was zu zeigen war.*

2.2 Sie sollen mit einem der beiden Würfel eine Primzahl (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...) würfeln. Gibt es einen Würfel, mit dem Sie diese Aufgabe mit größerer Wahrscheinlichkeit erledigen können? Antwort mit Begründung.

Auf dem Würfel W4 sind 2 und 3 die enthaltenen Primzahlen.

Da ein Laplace-Versuch vorliegt, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit zu $p(prim)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Beim W6-Würfel sind 2, 3 und 5 die Primzahlen. Daraus folgt $p(prim)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Beide Würfel zeigen also mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Primzahl.

3 Geben sind die Gerade $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und die Ebene $E: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

3.1 Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Gerade g senkrecht zur Ebene E steht.

Die Gerade steht senkrecht zur Ebene, wenn der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zu beiden Richtungsvektoren der Ebene steht:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}=2\cdot 4+(-1)\cdot 2+3\cdot(-2)=8-2-6=0 \rightarrow \textit{senkrecht}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix}=2\cdot(-3)+(-1)\cdot(-3)+3\cdot 1=-6+3+3=0 \rightarrow \textit{senkrecht}$$

Die Gerade steht also senkrecht zur Ebene.

3.2 Untersuchen Sie, ob der Ortsvektor der Ebene E auch ein möglicher Ortsvektor der Geraden g ist.

Einsetzen des Vektors in die Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}r=\frac{1}{2}\\ r=-1\\ r=\frac{1}{3}\end{matrix}$$

Da die r-Werte nicht übereinstimmen, liegt der Punkt nicht auf der Geraden und der Ortsvektor der Ebene ist damit auch kein möglicher Ortsvektor der Geraden.

---

4 4.1 Multiplizieren Sie die beiden Matrizen $M_1=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 2 & -4\end{pmatrix}$ und $M_2=\begin{pmatrix}5 & -1\\-3 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$

in der Form $M_1 * M_2$.

$$M_1 * M_2=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1\\-3 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+3\cdot(-3)+(-2)\cdot 0 & 1\cdot(-1)+3\cdot 1+(-2)\cdot 3\\0\cdot 5+2\cdot(-3)+(-4)\cdot 0 & 0\cdot(-1)+2\cdot 1+(-4)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -4\\-6 & -10\end{pmatrix}$$

4.2 Begründen Sie, dass sich bei der Multiplikation $M_2 * M_1$ ein anderes Ergebnis ergeben muss.

Hier wird eine 3x2-Matrix mit einer 2x3-Matrix multipliziert.
Das Ergebnis ist dann also eine 3x3-Matrix, die mit der 2x2-Matrix aus 4.1 nicht übereinstimmen kann.

Rechnung (war nicht verlangt):

$$\begin{pmatrix}5 & -1\\-3 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\0 & 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 13 & -6\\-3 & -7 & 2\\0 & 6 & -12\end{pmatrix}$$

Name: ___________________________

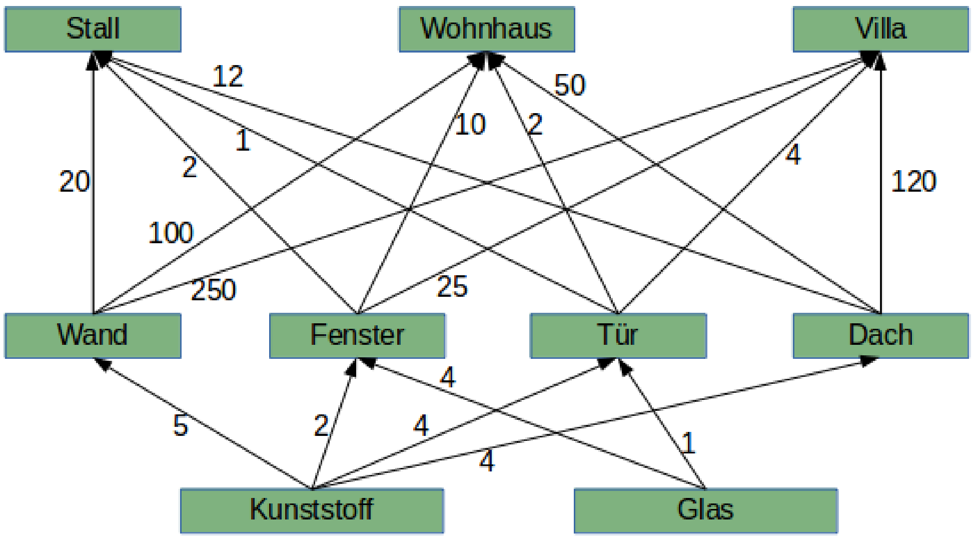
Für die folgenden Aufgaben sind GTR und Formelsammlung erlaubt

---

5 Das Startup-Unternehmen „Triplo“ will kleine Modellhäuser zum Zusammenbauen verkaufen. Dazu werden aus den Materialien Kunststoff und Glas einzelne Bauteile gefertigt, die dann zu fertigen Häusern zusammengesetzt werden können. Als Bauteile sind zunächst vorgesehen
quaderförmige Bausteine (für die Wände), die aus 5g Kunststoff bestehen.
Fenster werden aus 2g Kunststoff und 4g Glas gefertigt,
Türen aus 4g Kunststoff und 1g Glas und
Bausteine mit schräger Fläche (für Dächer) aus 4g Kunststoff.
Zunächst werden 3 verschiedene Haustypen angeboten:
Typ „Stall“ (20 Quader, 2 Fenster, 1 Tür, 12 Dachbausteine),
Typ „Wohnhaus“ (100 Quader, 10 Fenster, 2 Türen, 50 Dachbausteine) und
Typ „Villa“ (250 Quader, 25 Fenster, 4 Türen, 120 Dachbausteine).

5.1 Ein Spieleladen bestellt 50-mal „Stall“, 200-mal „Wohnhaus“ und 150-mal „Villa“. Berechnen Sie, wie viel Kilogramm von jedem Rohstoff (Kunststoff und Glas) benötigt werden.

Gozintograph zur Übersicht:



Daraus folgen die Materialverbrauchsmatrizen:

	Wand	Fenster	Tür	Dach
Kunststoff	5	2	4	4
Glas	0	4	1	0

	Stall	Wohnhaus	Villa
Wand	20	100	250
Fester	2	10	25
Tür	1	2	4
Dach	12	50	120

Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 100 & 250 \\ 2 & 10 & 25 \\ 1 & 2 & 4 \\ 12 & 50 & 120 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 422800 \\ 24450 \end{pmatrix}$$

Man benötigt also 422,8 kg Kunststoff und 24,45 kg Glas.

5.2 Kurz vor Weihnachten kommt noch ein Auftrag des Spieleladens an: Es werden für gute Kunden noch dringend 31-mal „Wohnhaus“ und 24-mal „Villa“ benötigt.
Die Firma hat noch 10000 Quader, 950 Fenster, 160 Türen und 4400 Dächer vorrätig.
Berechnen Sie mit Hilfe von Matrizen, ob der Auftrag ausgeführt werden kann.
Wenn das nicht der Fall sein sollte: Welche Zwischenprodukte müssen noch wie viel Mal hergestellt werden?

Hier wird nur die 2. Materialverbrauchsmatrix benötigt: $\begin{pmatrix} 20 & 100 & 250 \\ 2 & 10 & 25 \\ 1 & 2 & 4 \\ 12 & 50 & 120 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 31 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9100 \\ 910 \\ 158 \\ 4430 \end{pmatrix}$

Beim Vergleich der Mengen sieht man, dass genügend Quader, Fenster und Türen vorhanden sind. Da aber nur 4400 Dächer vorrätig sind, müssen noch 4430-4400=30 Dächer produziert werden.

6

Beim Wettbewerb DSDM („Deutschland sucht den Mathestar“) ist die Entscheidung gefallen. Die Top 10 der Teilnehmer standen schon länger fest und deren Namen waren allgemein bekannt:

Startnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Name	Felix	Carola	Mirco	Sarah	Viktor	Bruno	Birte	Lara	Gerd	Klaus

Nun steht auch die Reihenfolge fest und wird (als Startnummer) zur Einfachheit öffentlich auf einer allgemein zugänglichen Internetseite bekanntgegeben, allerdings in verschlüsselter Form, damit das Ergebnis vor der Preisverleihung nicht verraten wird.

Die Organisatoren des Wettbewerbs erhalten aber die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, mit der sie die verschlüsselte Liste entschlüsseln können.

Übermittelt wird die verschlüsselte Gewinner-Matrix $\begin{pmatrix} 1{,}9 & 0{,}1 & 3{,}2 & 2{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1{,}7 & -0{,}6 & 1{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, in der links oben der Gewinner und rechts unten die Person auf dem 10. Platz steht. In der 1. Zeile stehen die 5 besten Teilnehmer.

6.1 Decodieren Sie die Matrix (Dokumentation!), geben Sie die Reihenfolge der beteiligten Personen als Nummer und die Namen für den 1., 2. und 3. Platz (in dieser Reihenfolge) als Text an.

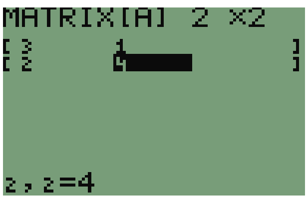
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}9 & 0{,}1 & 3{,}2 & 2{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1{,}7 & -0{,}6 & 1{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 & 8 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

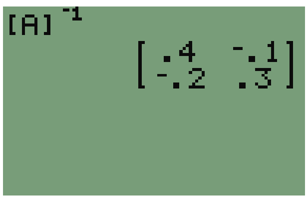
Reihenfolge (absteigend): 6 ; 2 ; 9 ; 8 ; 1 ; 5 ; 7 ; 4 ; 10 ; 3

1. Platz: Bruno ; 2. Platz: Carola ; 3. Platz: Gerd

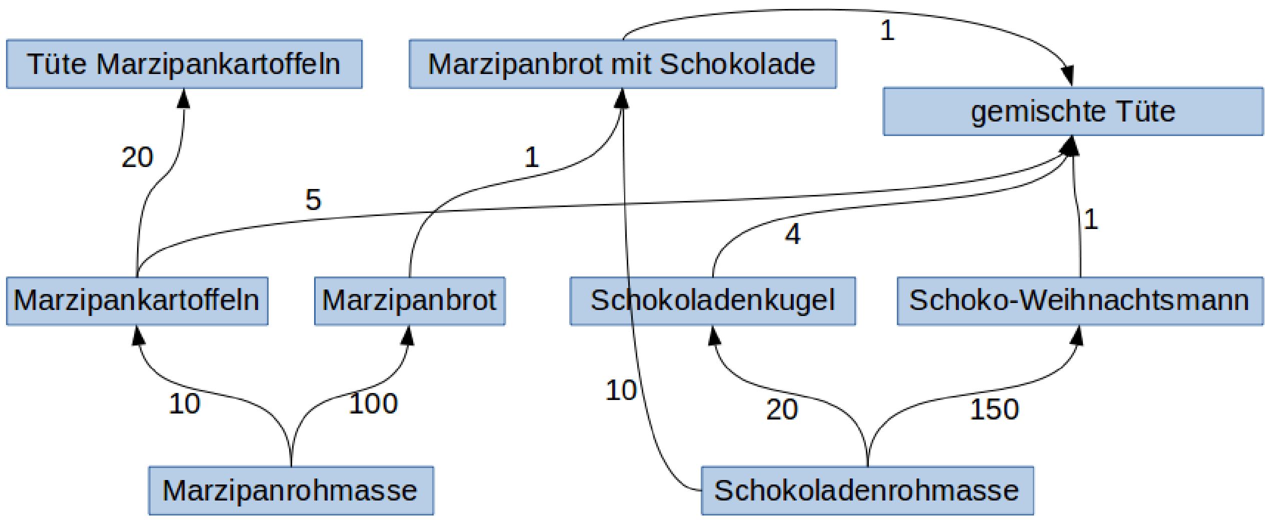
6.2 Berechnen Sie die Matrix, mit der die Jury die Gewinner-Reihenfolge verschlüsselt hat.

Es ist die inverse Matrix (M^{-1}) zur gegebenen Matrix (M) zu bilden:





7 Die Firma „WeihMath“ bietet Discountern vor Weihnachten folgende Süßigkeitssortimente an: Marzipanbrote mit Schokoladenüberzug, Tüten mit Marzipankartoffeln, Tüten mit gemischtem Inhalt. Die Zwischenprodukte und Rohstoffe kann man aber auch einzeln kaufen. Im Graph gelten die Angaben für Rohstoffe von jeweils 1g.



Ein Discounter gibt folgende Bestellung auf:
2000 Tüten Marzipankartoffeln,
300 Marzipanbrote mit Schokolade
100 Marzipanbrote ohne Schokolade
2000 gemischte Tüten
3000 Schokoladenkugeln
1000 Schokoladen-Weihnachtsmänner
Stellen Sie die Gesamtbedarfsmatrix auf und berechnen Sie, wie viel (in Kilogramm) Marzipanrohmasse und Schokoladenrohmasse für den Auftrag benötigt werden.

Einheitsmatrix - Direktbedarfsmatrix E-D:

	TM	MS	GT	MK	MB	SK	WM	MR	SR
TM	1	0	0	0	0	0	0	0	0
MS	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
GT	0	0	1	0	0	0	0	0	0
MK	-20	0	-5	1	0	0	0	0	0
MB	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
SK	0	0	-4	0	0	1	0	0	0
WM	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
MR	0	0	0	-10	-100	0	0	1	0
SR	0	-10	0	0	0	-20	-150	0	1

Gesamtbedarfsmatrix G ergibt sich aus der Direktbedarfsmatrix D und der Einheitsmatrix E aus

$G = (E-D)^{-1}$

	TM	MS	GT	MK	MB	SK	WM	MR	SR
TM	1	0	0	0	0	0	0	0	0
MS	0	1	1	0	0	0	0	0	0
GT	0	0	1	0	0	0	0	0	0
MK	20	0	5	1	0	0	0	0	0
MB	0	1	1	0	1	0	0	0	0
SK	0	0	4	0	0	1	0	0	0
WM	0	0	1	0	0	0	1	0	0
MR	200	100	150	10	100	0	0	1	0
SR	0	10	240	0	0	20	150	0	1

Die Gesamtbedarfsmatrix G wird mit dem Auftragsvektor y multipliziert und ergibt den Produktionsvektor x: $(E-D)^{-1}\cdot\vec{y}=\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 200 & 100 & 150 & 10 & 100 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 240 & 0 & 0 & 20 & 150 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 300 \\ 2000 \\ 0 \\ 100 \\ 3000 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 2300 \\ 2000 \\ 50000 \\ 2400 \\ 11000 \\ 3000 \\ 740000 \\ 693000 \end{pmatrix}$$

*Es werden also 740000 g = 740 kg Marzipanrohmasse
und 693000 g = 693 kg Schokoladenrohmasse benötigt.*

---

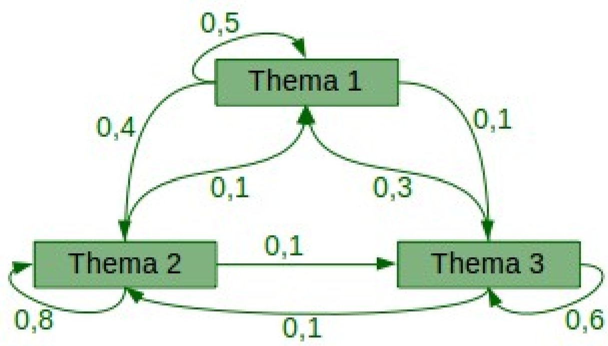
8 Für eine Projektwoche stehen 3 Themen zur Wahl. Zu Beginn des Auswahlverfahrens wählt jeder Schüler ein Thema. Danach darf man 3 Wochen lang an jedem Tag einmal die Wahl ändern.
Zum Schluss stellt sich heraus, dass jemand, der Thema 1 gewählt hat, am nächsten Tag mit 40% Wahrscheinlichkeit Thema 2 wählt und mit 10% Wahrscheinlichkeit Thema 3.
Jemand, der Thema 2 gewählt hat, wählt am nächsten Tag mit 10% Wahrscheinlichkeit Thema 1 und mit 10% Wahrscheinlichkeit Thema 3.
Jemand, der Thema 3 gewählt hat, wählt am nächsten Tag mit 30% Wahrscheinlichkeit Thema 1 und mit 10% Wahrscheinlichkeit Thema 2.

8.1 Am 2. Tag ist die Wahl ziemlich ausgeglichen: Thema 1 und Thema 2 werden jeweils von 30% der Schüler gewählt und Thema 3 mit 40%.
Berechnen Sie, ob sich im Lauf der Zeit das Ergebnis der Wahl stabilisiert und geben Sie, wenn möglich, den entsprechenden Fixvektor an.

Übergangsdiagramm und Übergangsmatrix:

Die nicht angegebenen Werte ergeben sich als Ergänzung zu 100%

		von		
		Thema 1	Thema 2	Thema 3
nach	Thema 1	0,5	0,1	0,3
	Thema 2	0,4	0,8	0,1
	Thema 3	0,1	0,1	0,6



Durch n-maliges Multiplizieren der Übergangsmatrix mit dem Anfangsvektor a (2. Tag) ergeben sich die Wahlen für den (n+2)-ten Tag:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \text{Ergebnisvektor}$$

		von		
		Thema 1	Thema 2	Thema 3
nach	Thema 1	0,5	0,1	0,3
	Thema 2	0,4	0,8	0,1
	Thema 3	0,1	0,1	0,6

Tag											
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0,3	0,3	0,28	0,262	0,25	0,242	0,238	0,236	0,235	0,234	0,234	0,234
0,3	0,4	0,47	0,513	0,538	0,551	0,559	0,563	0,565	0,566	0,566	0,566
0,4	0,3	0,25	0,225	0,213	0,206	0,203	0,202	0,201	0,200	0,200	0,200

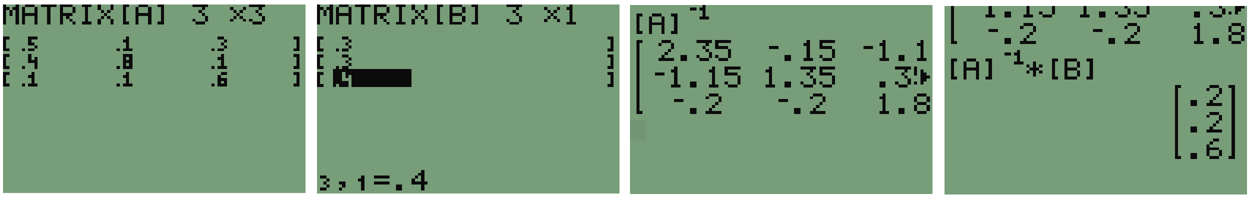
Für n=20 ergibt sich ein Ergebnis, das auf den Ergebnisvektor $\begin{pmatrix} \frac{7}{30} \\ \frac{17}{30} \\ \frac{6}{30} \end{pmatrix}$ *hindeutet.*

Die Überprüfung durch Multiplikation mit der Übergangsmatrix zeigt, dass dieses der Fixvektor ist.

8.2 Berechnen Sie das Wahlergebnis vom 1. Tag des Auswahlverfahrens.

Ist x der Vektor für den 1. Tag, so ergibt sich mit Hilfe der Übergangsmatrix M und des Anfangsvektors a:

$M \cdot \vec{x} = \vec{a} \;\rightarrow\; M^{-1} \cdot M \cdot \vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{a} \;\rightarrow\; E \cdot \vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{a} \;\rightarrow\; \vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{a}$



Am 1. Tag haben 20% das Thema 1 gewählt, ebenfalls 20% das Thema 2 und 60% das Thema 3.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!