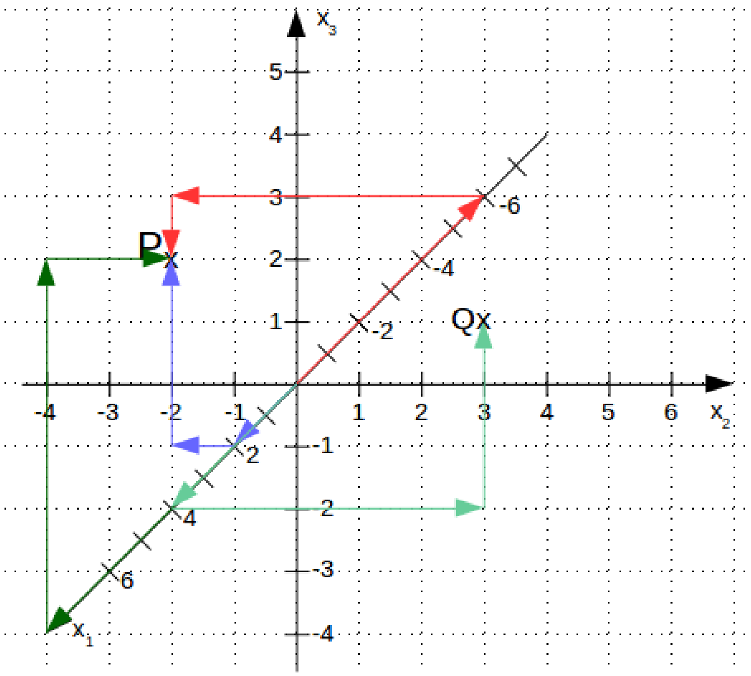
Lösung

1 Gegeben ist ein 3-dimensionales, rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Achsen x_1, x_2 und x_3.



1.1 Geben Sie den Ortsvektor für den Punkt P an, dessen x_2-Koordinate den Wert 2 hat.

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

1.2 Geben Sie einen weiteren möglichen Ortsvektor für den Punkt P an, dessen x_2-Koordinate nicht den Wert 2 hat.

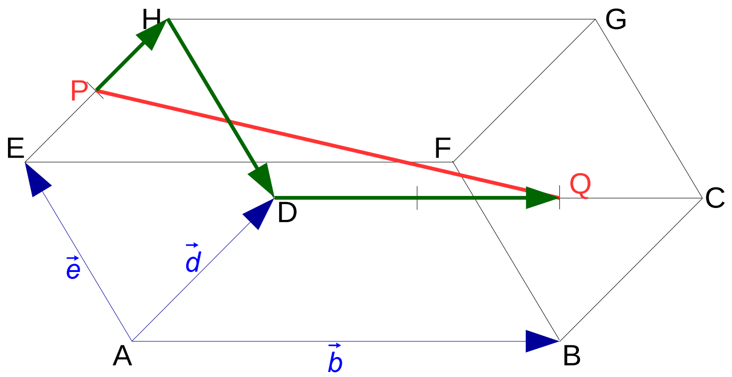
z. B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *oder* $\vec{p} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.3 Tragen Sie den Ort des Punktes Q mit den Koordinaten Q(4/5/3) ein.

---

2 Ein Parallelflach (wie ein Quader, nur dass nicht alle Winkel gleich 90° sind) ist gegeben durch die 3 Vektoren

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Die Seitenkante EH wird durch den Punkt P halbiert. Die Seitenkante DC wurde gedrittelt, wobei Q auf einem der Teilungspunkte liegt. Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ.

Der Vektor PQ wird durch die gegebenen Vektoren dargestellt:

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}\cdot\vec{d} - \vec{e} + \frac{2}{3}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1+0 \\ 0+1+4 \\ 0-3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Vektor-Länge ergibt die gesuchte Streckenlänge:

$$|\vec{PQ}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43} \approx 6{,}56$$

3 Gegeben ist die Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3.1 Zeigen Sie, dass der Punkt P(0/2/1) auf der Geraden liegt.

Ortsvektor in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 0=-6+3k \\ 2=12-5k \\ 1=3-k \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 6=3k \\ -10=-5k \\ -2=-k \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2=k \\ 2=k \\ 2=k \end{matrix}$$

Da k in allen Gleichungen denselben Wert hat, liegt der angegebene Punkt auf der Geraden.

3.2 Ein Lichtstrahl fällt in Richtung des Richtungsvektors der Geraden vom Punkt P(-6/12/3) aus auf die x_1-x_2-Ebene.
Berechnen Sie die Koordinaten des Auftreffpunktes auf dieser Ebene.

In der x_1-x_2-Ebene hat die x_3-Koordinate den Wert 0. Daraus folgt der Ansatz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1=-6+3k \\ x_2=12-5k \\ 0=3-k \rightarrow k=3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1=-6+3\cdot 3=-6+9=3 \\ x_2=12-5\cdot 3=12-15=-3 \end{matrix}$$

Der Spurpunkt S_{12} in der x_1-x_2-Ebene hat also die Koordinaten S_{12}(3/-3/0)

3.3 An der x_1-x_2-Ebene wird der Lichtstrahl gespiegelt. Berechnen Sie die Geradengleichung des gespiegelten Lichtstrahls.

Bei Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene muss das Vorzeichen der x_3-Koordinate gewechselt werden:

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Geben Sie mit Begründung an, ob der gespiegelte Lichtstrahl nach der Spiegelung noch die x_2-x_3-Ebene schneidet. Wenn Sie 3.2 nicht lösen konnten, gehen Sie von dem Spiegelungs-Punkt (5/-5/0) aus.

Der Richtungsvektor zeigt in positive x_1-Richtung. Der Spiegelungspunkt hat einen positiven x_1-Wert. Im weiteren Verlauf nimmt der x_1-Wert im positiven Bereich immer größere Werte an, wird also nie mehr zu 0. Also wird die x_2-x_3-Ebene auch nicht mehr geschnitten.

---

4 Geben sind die Ebene E und die beiden Geraden g_1 und g_2:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.1 Zeigen Sie rechnerisch oder durch Begründung, dass die Gerade g_1 in der Ebene E liegt.

Der Punkt (1/2/0) liegt sowohl in der Ebene E als auch auf der Geraden g_1 (siehe gleiche Ortsvektoren in den Gleichungen). Die Summe der beiden Richtungsvektoren der Ebene E ergibt den Richtungsvektor der Gerade g_1. Folglich liegt g_1 parallel zur Ebene und wegen des übereinstimmenden Punktes auch in der Ebene.

4.2 Zeigen Sie rechnerisch oder durch Begründung, dass die Gerade g_2 nicht in der Ebene E liegt.

Der Richtungsvektor der Geraden g_2 stimmt mit einem Richtungsvektor der Ebene überein. Damit sind Gerade g_2 und Ebene E parallel. Wenn der zum Ortsvektor der Gerade g_2 gehörende Punkt *nicht in der Ebene liegt, liegt auch die Gerade nicht in der Ebene. Rechnung dazu:*

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}1=1+2r-s\\3=2+r+0\\2=0+r+2s\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}s=2r\\r=1\\r+2s=2\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}s=2\\r=1\\1+4\neq 2\end{matrix}$$

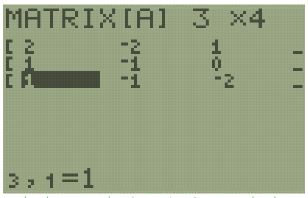
Die 3. Gleichung ist nicht erfüllt, also liegt der Punkt nicht in der Ebene, also liegt auch die ganze Gerade g_2 nicht in der Ebene E.

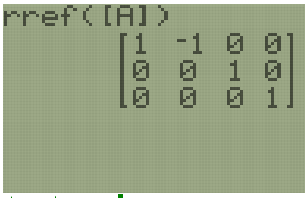
4.3 Zeigen Sie rechnerisch oder durch Begründung, dass die Gerade g_2 die Ebene E <u>nicht</u> schneidet.

Wie schon in 4.2 gezeigt, liegt die Gerade g_2 parallel zur Ebene und nicht in der Ebene. Folglich schneidet die Gerade die Ebene auch nicht.

Alternative Lösungsmöglichkeit über ein Gleichungssystem und mit Unterstützung des Taschenrechners:

Gleichsetzen der Geraden- und der Ebenengleichung und dann Lösen des Gleichungssystems





$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}2u-2r+1s=0\\1u-1r-0s=-1\\1u-1r-2s=-2\end{bmatrix}$$

In der 3. Zeile des Ergebnisses steht 0=1, also eine falsche Aussage. Damit gibt es keine Lösung und also auch keinen Schnittpunkt der Gerade g_2 mit der Ebene E.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!