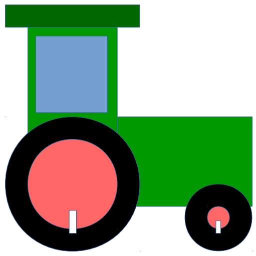
Lösung

1 Klein-Mathes spielt mit seinem Spielzeugtrecker. Er stellt die Räder so ein, dass die Ventile beide nach unten zeigen. Dann rollt er den Trecker vorwärts. Nach jeweils 9 cm Strecke hat sich das Vorderrad einmal gedreht, nach jeweils 24 cm hat sich das Hinterrad einmal gedreht. Berechne, wie weit Klein-Mathes den Trecker schieben muss, damit beide Ventile wieder genau nach unten zeigen.



Gesucht ist das kgV(9;24). Die 24-Reihe ist 24, 48, 72, 96, ...
Die erste Zahl in der Reihe, die durch 9 zu teilen ist, ist die 72. also gilt kgV(9;24)=72.

---

2 Gib mit Begründung an, ob 7 ein Teiler ist von
a) $20 \cdot 28 - 21 \cdot 17$ b) $14 \cdot 35 + 12$

Zu a): Der Term ist durch 7 zu teilen, da bei jedem Summanden ein Faktor durch 7 zu teilen ist:
$20 \cdot 28 - 21 \cdot 17$

Zu b): Der Term ist nicht durch 7 zu teilen, da der zweite Summand (12) nicht durch 7 zu teilen ist.

---

3 Trick behauptet: "Eine Zahl, die durch 18 zu teilen ist, ist auch durch 2 und 6 zu teilen".
Track behauptet: "Eine Zahl, die durch 18 zu teilen ist, ist auch durch 12 zu teilen".
Gib mit Begründung an, ob die Aussagen von Trick und Track richtig oder falsch sind.

Trick hat Recht: Da 18 durch 2 (18=2·9) und auch durch 6 (18=3·6)zu teilen ist, kann man die Zahl statt durch 18 auch "nur" durch 2 oder 6 teilen.

Track hat nicht Recht: Er hat wohl gemeint, weil 2·6=12 ist, könne man auch sagen, dass die Zahl durch 12 zu teilen ist. Da 12 aber gleich 2·2·3 und 18 gleich 2·3·3 ist, muss die durch 18 teilbare Zahl einmal durch 2 zu teilen sein. Bei Teilbarkeit durch 12 müsste die Zahl aber zweimal durch 2 zu teilen sein. Beispiel: 54 ist durch 18 zu teilen, aber nicht durch 12.

---

4 4.1 Stimmt es, dass von 5 aufeinander folgenden ganzen Zahlen keine durch 6 zu teilen ist? Begründe!

Nein, das stimmt nicht. Gegenbeispiel: 4, 5, 6, 7, 8. Die 6 ist durch 6 zu teilen.

4.2 Stimmt es, dass von 9 aufeinander folgenden Zahlen eine Zahl durch 7 zu teilen ist? Können es auch mehr Zahlen sein, die durch 7 zu teilen sind? Begründe!

Ja, das stimmt: Die Vielfachen von 7 haben den Abstand 7. Spätestens nach der 7. Zahl hat man also eine durch 7 teilbare Zahl erreicht. 9 aufeinander folgende Zahlen reichen also aus, um mindestens eine durch 7 teilbare Zahl zu erhalten.
Auch 2 der 9 aufeinander folgenden Zahlen können durch 7 zu teilen sein.
Beispiel: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

5 5.1 Mathes hat aus Zahlentäfelchen eine Zahl gelegt und behauptet, dass sie durch 9 ohne Rest zu teilen sei. Bestätige das mit Begründung.

Die Quersumme der Zahl ist durch 9 zu teilen: 5+6+2+7+8+7+1=36 ; 36:9=4.

5.2 Der große Bruder will Mathes ärgern, nimmt abends ein Zahlenplättchen weg und mischt die anderen Plättchen. Am nächsten Morgen kennt Mathes seine Zahl nicht mehr. Beschreibe eine "Gebrauchsanweisung", mit der Mathes die fehlende Ziffer rechnerisch herausfinden kann.

Mathes muss die Summe aller übrig geblieben Zahlen berechnen. Dann ist die Zahl gesucht, die man noch addieren muss, um eine durch 9 teilbare Zahl zu erhalten.
Beispiel: Hat der Bruder die 8 weggenommen, dann rechnet Mathes: 5+6+2+7+7+1=28. Bis zur nächsten durch 9 teilbaren Zahl (36) fehlen noch 8. Also hat der Bruder die 8 weggenommen.

Nachdem Mathes die fehlende Zahl ergänzt hat, weiß er auch die Reihenfolge der Zahlen nicht mehr. Er legt deshalb die Ziffern in zufälliger Reihenfolge hin. Kann es sein, dass die neue Zahl auch durch 9 zu teilen ist? Antworte mit Begründung.

Nach Ergänzung durch eine neue 8 kann Mathes die Ziffern beliebig anordnen. Immer ist die neu entstandene Zahl durch 9 zu teilen, weil die Quersumme sich beim Vertauschen der Ziffern nicht ändert.

---

6 Warum kann die Zahl 595959 keine Primzahl sein?

Die Zahlenfolge 59 ist dreimal hintereinander gesetzt. die 59 taucht an der Einerstelle, der 100-Stelle und an der 10000-Stelle auf. Es gilt also: 595959=10101·59. Die Zahl 595959 ist also in (mindestens) zwei echte Faktoren zu zerlegen.

---

7 Zerlege die Zahl 630 in Primfaktoren.

$630=7\cdot 90=7\cdot 9\cdot 10=7\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 5=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

---

8 8.1 Begründe, dass 2 verschiedene gerade Zahlen immer einen ggT haben müssen.

Da die Zahlen gerade sind, haben sie beide den Teiler 2. Auch, wenn es keinen größeren gemeinsamen Teiler gibt, ist 2 auf alle Fälle ein Teiler (und möglicherweise auch der ggT).

8.2 Begründe, dass 2 verschiedene Primzahlen immer denselben ggT haben.

Primzahlen sind neben sich selbst auch durch 1 zu teilen. Alle verschiedenen Primzahlen haben deshalb den größten gemeinsamen Teiler 1.

8.3 Gibt es zwei verschiedene Zahlen, die keinen ggT haben? Begründe!

Nein, alle Zahlen haben einen ggT, nämlich entweder den Teiler 1 oder auch möglicherweise einen größeren Teiler.

---

9 Ersetze die Vierecke mit passenden Zahlen.
Bedingung: In den Klammern sollen die beiden Zahlen verschieden sein.

kgV(☐;12)=48 *☐=16 (oder auch 48)*

kgV(23;☐)=23 *☐=1*

ggT(34;12)=☐ *☐=2*

kgV(8;14)=☐ *☐=56*

Bei den folgenden Aufgaben sollen die Zahlen in den Vierecken größer als 10 sein:

ggT(15;☐)=5 *☐=20 (oder auch 25, 35, 40, 50, 55, 65, ...)* *Welche Zahlen fehlen?*

ggT(☐;24)=6 *☐=18 (oder auch 30, 42, 54, 66, 78, ...)* *Welche Zahlen fehlen?*

---

10 Gib die Menge aller Teiler der Zahl 30 an.

Es gilt $30=2\cdot 3\cdot 5$ *. Primfaktoren sind also 2, 3, 5. Zusätzlich sind 1 und 30 auch Teiler der Zahl 30. Daraus ergibt sich durch Kombinationen die Menge aller Teiler* $T=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ *.*

Der "ggT(a;b)" ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b.

Das "kgV(a;b)" ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen a und b.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!