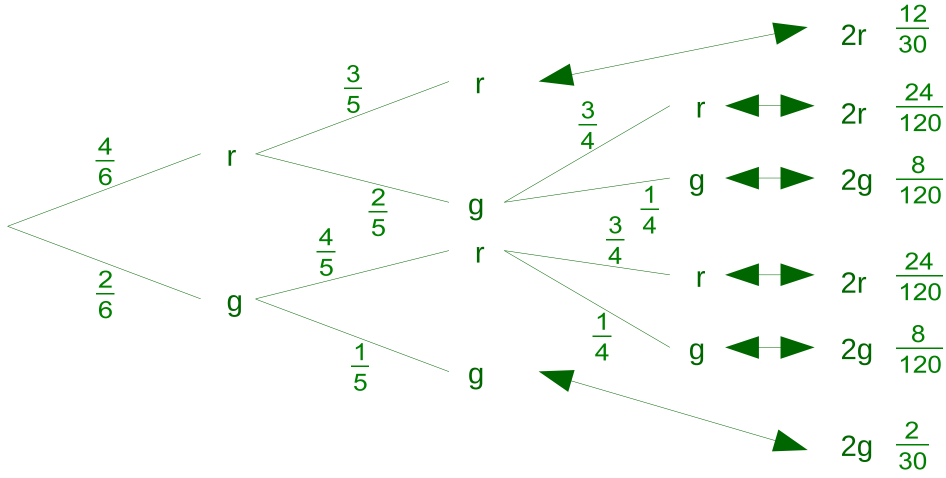
Lösung

Falls Sie den Taschenrechner benutzen, müssen Sie Ihr Vorgehen so dokumentieren, dass man die einzelnen Schritte nachvollziehen kann.

1 Colorina besitzt 2 Paar rote und 1 Paar grüne Strümpfe. Nachts lagern die Strümpfe durcheinander in einer Kiste. Jeden Morgen nimmt Colorina der Reihe nach zufällig einen Strumpf nach dem nächsten aus der Kiste, bis sie ein passendes Paar (gleiche Farbe) hat.

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, an wie viel Prozent der Tage Colorina rote Strümpfe trägt.



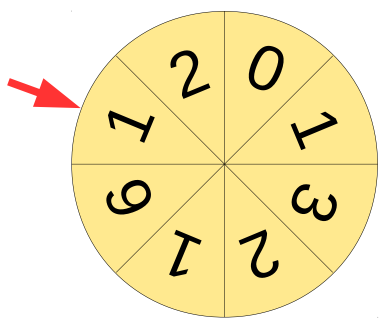
Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen. Man zieht, bis 2 gleiche Farben vorhanden sind.

Die Wahrscheinlichkeit für 2 rote Strümpfe ist $p(2r)=\frac{12}{30}+\frac{24}{120}+\frac{24}{120}=\frac{48+24+24}{120}=\frac{96}{120}=80\,\%$.

Die Wahrscheinlichkeit für 2 grüne Strümpfe ist $p(2g)=\frac{8}{120}+\frac{8}{120}+\frac{2}{30}=\frac{8+8+8}{120}=\frac{24}{120}=20\,\%$.

Colorina trägt also an 80% der Tage rote Strümpfe.

2 Bei einem Glücksspiel wird die Scheibe gedreht. Nach dem Stillstand wird die Zahl, auf die der Pfeil zeigt, in Euro als Gewinn ausgezahlt.



2.1 Begründen Sie, warum es sich bei dem Glücksrad im Prinzip um einen Laplace-Versuch handelt.

Alle Felder sind gleich groß und besitzen die gleichen Zentrumswinkel. Die Wahrscheinlichkeit für jedes Feld, also jedes Elementarereignis, ist also gleich.

2.2 Begründen Sie, warum kein Laplace-Versuch und auch kein Bernoulli-Versuch vorliegen, wenn es um die gezogene Zahl geht.

Für das Auftreten der verschiedenen Zahlen sind die Wahrscheinlichkeiten verschieden. Deshalb liegt kein Laplace-Versuch vor. Da mehr als 2 Ergebnisse auftreten können (also nicht nur „Erfolg" und „Misserfolg") liegt auch kein Bernoulli-Versuch vor.

2.3 Berechnen Sie den Spieleinsatz für den Fall, dass das Spiel fair ist.

Gesucht ist der Erwartungswert: μ=E(X)=2.
Man wird also pro Spiel im Schnitt 2 € gewinnen.
Für ein faires Spiel muss dann der Einsatz auch 2 € betragen.

k	p(X=k)	k·p(X=k)
0	1/8	0
1	3/8	3/8
2	2/8	4/8
3	1/8	3/8
6	1/8	6/8
	Summe=	2

2.4 Berechnen Sie die Standardabweichung und geben Sie das Intervall für die Zahlen an, die in der 1σ-Umgebung des Erwartungswertes liegen.

Nun muss noch das Quadrat der Abweichungen vom Erwartungswert mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert und dann das Ganze addiert werden.

Für die Varianz ergibt sich 3, damit für die Standardabweichung $\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3}\approx 1{,}73$.

Daraus folgt mit 2-1,73 und 2+1,73 das Intervall $[1;3]$.

k	p(X=k)	k·p(X=k)	(k-E(X))²·p(X=k)
0	1/8	0	4/8
1	3/8	3/8	3/8
2	2/8	4/8	0
3	1/8	3/8	1/8
6	1/8	6/8	2
	Summe=	2	3

---

3 Jemand behauptet, es gelte die Gleichung $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n+1}{n-k}$.

3.1 Überprüfen Sie die Aussage am Beispiel n=12 und k=3 (Dokumentation!)

$$\binom{12+1}{3+1}=\binom{13}{4}=\frac{13!}{4!\cdot(13-4)!}=\frac{13!}{4!\cdot 9!}=715$$

$$\binom{12+1}{12-3}=\binom{13}{9}=\frac{13!}{9!\cdot(13-9)!}=\frac{13!}{9!\cdot 4!}=715$$

Die Werte stimmen überein. Für das Zahlen-Beispiel gilt also die gegebene Gleichung.

3.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass die Aussage allgemein richtig ist.

$$\binom{n+1}{k+1}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$$

$$\binom{n+1}{n-k}=\frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot((n+1)-(n-k))!}=\frac{(n+1)!}{(n-k)!\cdot(1+k)!}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen stimmen überein, also stimmt die Behauptung.

---

4 In einer Postfiliale gibt es 3 Schalter, von denen aber meistens nur 2 besetzt sind. Durchschnittlich kommen 100 Personen in der Stunde in die Filiale. Die Bearbeitungszeit pro Kunde beträgt etwa 2 Minuten. Eine Wartezeit von wenigen Minuten gilt als angemessen.

4.1 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Kunden bei 2 geöffneten Schaltern warten müssen.

Mit n=100 und p=2/60=1/30 wird die summierte Binomialverteilung für X kleiner oder gleich 2 berechnet. $B_{100;\frac{1}{30}}(X \le 2) = binomcdf(100{,}1/30{,}2) = 0{,}348$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass 0, 1 oder 2 Schalter benötigt werden, beträgt also 34,8%. In allen anderen Fällen, also in 100,0%-34,8%=65,2%, muss man warten.

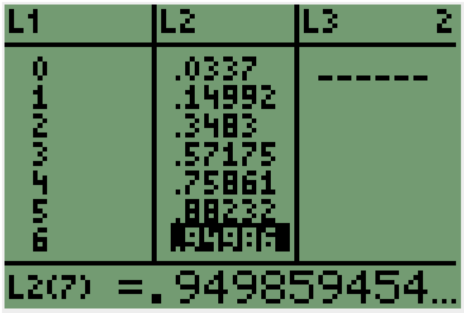
4.2 Berechnen Sie, wie viel Schalter mindestens geöffnet sein müssten, damit man in 90% aller Fälle nicht warten muss.

Durch Probieren mit dem Taschenrechner erhält man den Wert 5. Es müssten also 5 Schalter geöffnet sein, damit man in 90% aller Fälle nicht warten muss.

Formeln in den Listen:

L1=seq(X,X,0,6,1)

L2=binomcdf(100,1/30,L1)

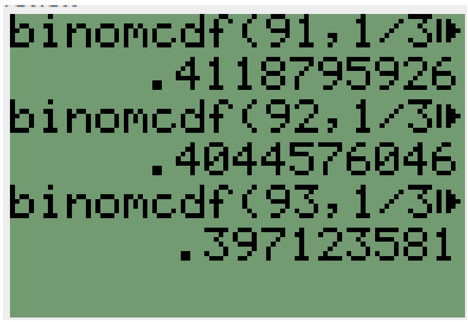


4.3 Im Selbstversuch stellt man fest, dass man in etwa 60% der Fälle bei 2 geöffneten Schaltern warten muss. Bestimmen Sie (Dokumentation!), wie viel Personen unter dieser Voraussetzung pro Stunde die Filiale besuchen.

In diesem Fall ist der Wert für n unbekannt. Wenn man in 60% aller Fälle warten muss, werden in 40% aller Fälle 0,1 oder 2 Schalter benötigt.
Bedingung: binomcdf(n,1/30,2)=0,40 ; n ist gesucht.

Durch Probieren mit dem Taschenrechner (siehe rechts) erhält man einen n-Wert zwischen 92 und 93.

Die persönlichen Beobachtungen deuten also auf eine Kundenzahl von etwas unter 100 Personen pro Stunde hin.



---

5 Die Lotto-Superzahl wird aus 10 Kugeln (beschriftet von 0 bis 9) gezogen. Bis zum Beginn dieser Woche wurde die Zahl 1195-mal ermittelt. Hier die Statistik:

Superzahl	Anzahl der Ziehungen
0	118
1	120
2	106
3	118
4	136
5	138
6	101
7	135
8	115
9	108

5.1 Berechnen Sie, wie oft jede Zahl durchschnittlich gezogen sein müsste.

Auf Grund der Häufigkeitsinterpretation sollten bei einer Versuchs-Anzahl von n=1195 und einer Wahrscheinlichkeit von p=1/10 für jede Ziffer die Anzahl der einzelnen Zahlen bei $n\cdot p=\frac{1195\cdot 1}{10}=119{,}5$ *liegen.*

5.2 Geben Sie das kleinste zum Erwartungswert symmetrische Intervall an, in dem mit mindestens 90% Sicherheit die Anzahl der Ziehungen liegen.
Lösen Sie die Aufgabe näherungsweise mit den σ-Regeln und exakt.
Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Mit σ-Regeln:

Berechnung von σ: $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{1195\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}=\sqrt{\frac{10755}{100}}=\sqrt{107{,}55}\approx 10{,}37$

Damit ergibt sich das Intervall $[119{,}5-1{,}64\cdot 10{,}37\,;\,119{,}5+1{,}64\cdot 10{,}37]=[102{,}49\,;\,136{,}51]$

Da die Werte ganzzahlig sein müssen, ergibt sich für das kleinste Intervall $[103\,;\,136]$.

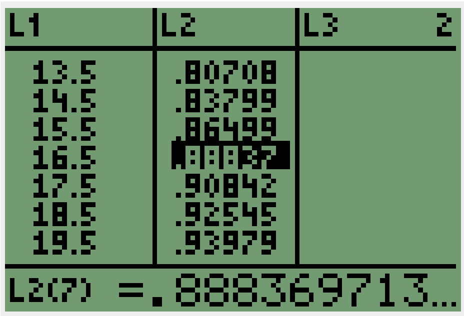
Exakte Bestimmung:
In den Taschenrechner werden zum Erwartungswert symmetrische Werte als Grenzen eingegeben.

L1=seq(X,X,10.5,20.5,1)

L2=binomcdf(1195,1/10,119.5+L1)-binomcdf(1195,1/10,119.5-L1)

Für das kleinste Intervall wird der Wert 16,5 genommen.
Man erhält das Intervall $[119{,}5-16{,}5\,;\,119{,}5+16{,}5]=[103\,;\,136]$.

Die Näherung stimmt mit der exakten Rechnung überein.



5.3 Überprüfen Sie, ob die angegebene Statistik mit Ihren Berechnungen übereinstimmt.

Bis auf die Werte 138 und 101 liegen alle Werte im Intervall. Das sind 80% der Werte, während es nach der Rechnung 90% sein sollten.

$\mu=E(X)=n\cdot p$ | $P(\mu-1\cdot\sigma\le X\le\mu+1\cdot\sigma)=0{,}683$

$V(X)=n\cdot p\cdot q$ | $P(\mu-2\cdot\sigma\le X\le\mu+2\cdot\sigma)=0{,}955$

$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n\cdot p\cdot q}$ | $P(\mu-3\cdot\sigma\le X\le\mu+3\cdot\sigma)=0{,}997$

$P(\mu-1{,}64\cdot\sigma\le X\le\mu+1{,}64\cdot\sigma)=0{,}90$

$P(\mu-1{,}96\cdot\sigma\le X\le\mu+1{,}96\cdot\sigma)=0{,}95$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ | $P(\mu-2{,}58\cdot\sigma\le X\le\mu+2{,}58\cdot\sigma)=0{,}99$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!