2014-12-18 Klausur 2 Kurs 11ma5 Mathematik

Lösung

Bei den Aufgaben 1 bis 5 müssen die Integrale algebraisch (also ohne Taschenrechnerfunktionen für das Auswerten von Graphen und das Lösen von Integralen) berechnet werden.

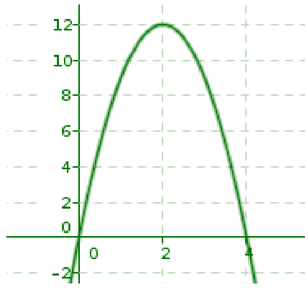
---

1 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_1^3 (3x^2 - 4x + 2)\, dx =$

$$\int_1^3 (3x^2-4x+2)\,dx = \left[3\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = [x^3-2x^2+2x]_1^3 = (27-18+6)-(1-2+2) = 15-1 = 14$$

---

2 Zwischen dem Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = 3x\cdot(4-x)$ und der x-Achse ist ein Flächenstück vollständig eingeschlossen. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.



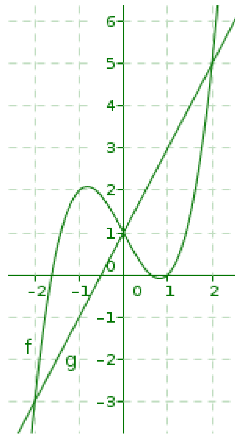
Nullstellen befinden sich bei $x_1 = 0$ *und* $x_2 = 4$ *(1 Faktor muss im Funktionsterm jeweils zu 0 werden).*
Die Nullstellen geben die Integrationsgrenzen an:

$$\int_0^4 3x\cdot(4-x)\,dx = \int_0^4 (12x - 3x^2)\,dx = [6x^2 - x^3]_0^4 = (96-64) - 0 = 32$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 32 Flächeneinheiten.

---

3 Zwischen den Graphen mit den Gleichungen $f(x) = x^3 - 2x + 1$ und $g(x) = 2x + 1$ sind Flächenstücke vollständig eingeschlossen. Berechnen Sie den gesamten Flächeninhalt aller eingeschlossenen Bereiche.



Berechnung der Schnittpunkte zwischen den Graphen:

$f(x) = g(x) \rightarrow x^3 - 2x + 1 = 2x + 1 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow x\cdot(x^2-4) = 0 \rightarrow$

$x_1 = 0 \; ; \; x_2 = -2 \; ; \; x_3 = 2$

Berechnung einer Stammfunktion: $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$

Berechnung der 1. Teilfläche: $\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^0 = 0 - (4-8) = -(-4) = 4$

Berechnung der 2. Teilfläche: $\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = (4-8) - 0 = -4$

Die Summe der Beträge gibt den gesamten Flächeninhalt an: $A = 4 + |-4| = 4 + 4 = 8$

---

4 Geben Sie eine Stammfunktion F(x) zum Integral $\int \frac{6}{\sqrt{x}}dx =$ an.

$F(x)=12\cdot\sqrt{x}+c$, da $F'(x)=12\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{6}{\sqrt{x}}$

---

5 Berechnen Sie alle Werte für den Parameter k, wenn gilt: $\int_1^k (6x-5)dx=k^2$.

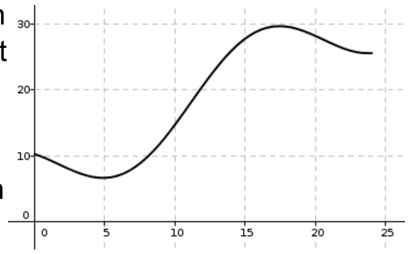
$\int_1^k (6x-5)dx=[3x^2-5x]_1^k=(3k^2-5k)-(3-5)=3k^2-5k+2\overset{!}{=}k^2 \rightarrow 2k^2-5k+2=0 \rightarrow$

$k^2-\frac{5}{2}\cdot k+1=0 \rightarrow k_{1,2}=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-1}=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{16}{16}}=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}\pm\frac{3}{4} \rightarrow$

$k_1=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=\frac{8}{4}=2$; $k_2=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ *Damit sind 2 und 0,5 die gesuchten k-Werte.*

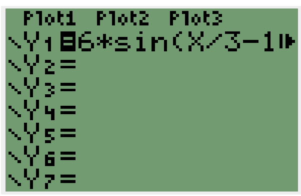
---

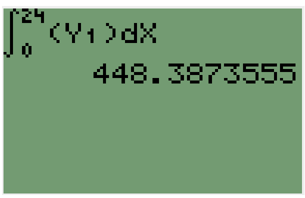
6 Das Diagramm zeigt die unwetterartigen Niederschlagsmengen während der 24 Stunden eines Tages an. Die Zeit ist waagrecht abgetragen, die momentane Niederschlagsmenge V(t) in der Einheit $\frac{mm}{h}$ (Millimeter pro Stunde) auf der senkrechten Achse. Die Niederschlagskurve kann angenähert werden durch folgende Funktionsgleichung: $V(t)=6\cdot\sin\left(\frac{t}{3}-10\right)+t+7$



Berechnen Sie mit Hilfe der Taschenrechnerfunktionen die gesamte Niederschlagsmenge für den ganzen Tag.

Zu berechnen ist das Integral $\int_0^{24} V(t)\,dt=\int_0^{24}\left(6\cdot\sin\left(\frac{t}{3}-10\right)+t+7\right)dx \overset{\text{Taschenrechner}}{\approx} 448{,}4$





Während des Tages sind also 448,4 mm Wasser abgeregnet.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!