Lösung

1 Lösen Sie folgendes Gleichungssystem nach dem Gauß-Verfahren ohne Hilfe des Taschenrechners. Rechts oberhalb und links unterhalb der Diagonalen sollen nur Nullen stehen.

$$\left|\begin{array}{rcrr} a+b-c & = & -3 & (1) \\ a-b+c & = & 5 & (2) \\ -a+b+2c & = & 1 & (3) \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcrr} a+b-c & = & -3 & (4)=(1) \\ 2b-2c & = & -8 & (5)=(1)-(2) \\ 2b+c & = & -2 & (6)=(1)+(3) \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcrr} a+b-c & = & -3 & (7)=(1) \\ 2b-2c & = & -8 & (8)=(5) \\ 3c & = & 6 & (9)=(6)-(5) \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcrr} a+b-c & = & -3 & (10)=(7) \\ b-c & = & -4 & (11)=(8)/2 \\ c & = & 2 & (12)=(9)/3 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcrr} a+b & = & -1 & (13)=(10)+(12) \\ b & = & -2 & (14)=(11)+(12) \\ c & = & 2 & (15)=(12) \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{rcrr} a & = & 1 & (16)=(13)+(14) \\ b & = & -2 & (17)=(14) \\ c & = & 2 & (18)=(15) \end{array}\right|$$

---

2 Ohne größere Rechnung kann man folgenden Gleichungssystemen ansehen, ob sie keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben. Geben Sie für jedes Gleichungssystem mit Begründung (in Worten oder im Notfall auch als Rechnung) die Anzahl der Lösungen an.

2.1 $$\left|\begin{array}{rcr} a-b+c & = & -3 \\ -a+b-c & = & 5 \end{array}\right|$$

Eigentlich müsste das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen haben, da es 3 Unbekannte, aber nur 2 Gleichungen besitzt.

Aber: die Addition der linken Gleichungsseiten ergibt 0, die der rechten Seiten aber 2. Da 0≠2, hat das System keine Lösung.

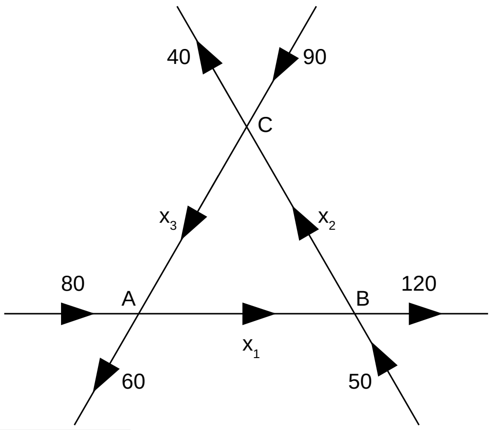
2.2 $$\left|\begin{array}{rcr} a-b & = & -3 \\ a+b & = & 5 \\ -2a+2b & = & 6 \end{array}\right|$$

Das Gleichungssystem hat 2 Unbekannte, aber 3 Gleichungen. Das Gleichungssystem könnte also überbestimmt sein und damit keine Lösung besitzen.

Multipliziert man die 1. Gleichung aber mit -2, so ergibt sich die 3. Gleichung. In Wirklichkeit liegen also nur 2 unabhängige Gleichungen vor und es gibt genau eine Lösung: a=1 und b=4.

2.3 $$\left|\begin{array}{ccc} 6+a & = & -3 \\ 17 & = & -c+5 \\ 3b+4 & = & 6-7b \end{array}\right|$$

Da es 3 Gleichungen mit 3 Variablen gibt und in jeder Gleichung nur jeweils eine einzige Variable vorkommt, gibt es mit Sicherheit genau 1 Lösung: a=-9 ; c=-12 ; b=0,2

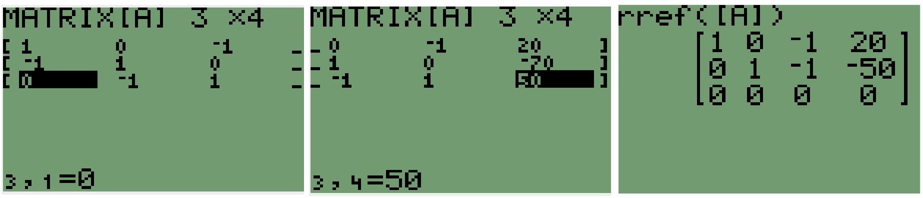


3

An einem Kreisel mit 3 Anschlussstellen wird eine Verkehrszählung durchgeführt. Die Werte bedeuten Autos pro Stunde.

3.1 Lösen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Werte x_1, x_2 und x_3, das man auf Grund der Messungen erstellen kann.

$$\begin{array}{lccc} A & x_1+60 & = & x_3+80 \\ B & x_2+120 & = & x_1+50 \\ C & x_3+40 & = & x_2+90 \end{array} \rightarrow \begin{array}{lccc} A & x_1 \quad -x_3 & = & 20 \\ B & -x_1+x_2 & = & -70 \\ C & -x_2+x_3 & = & 50 \end{array}$$



Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen. Für x_3 wird der Parameter d gesetzt.

Lösung: $x_1=20+d$; $x_2=-50+d$; $x_3=d$ *mit der Bedingung* $d \geq 50$ *, damit x_2 positiv wird.*

Beantworten Sie mit Begründung folgende Fragen:

3.2 Welcher Streckenabschnitt im Kreisel ist am meisten durch Verkehr belastet?

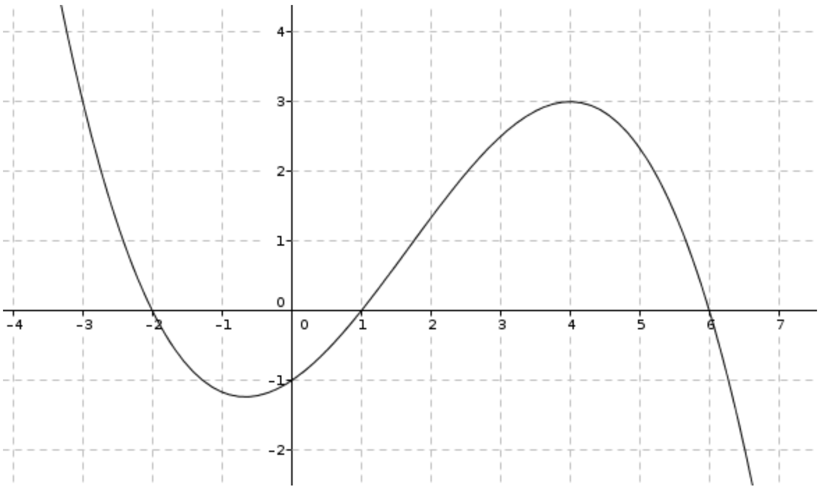
x_1 ist am meisten belastet, da bei x_1 der größte Wert zu d addiert wird.

3.3 Welcher Streckenabschnitt könnte kurzfristig ohne größere Auswirkungen gesperrt werden?

Wenn d=50, gilt x_2=0. Die Strecke x_2 könnte also gesperrt werden, wenn der Kreisel nicht durch zusätzlich im Kreisel fahrende Fahrzeuge belastet wird.

---

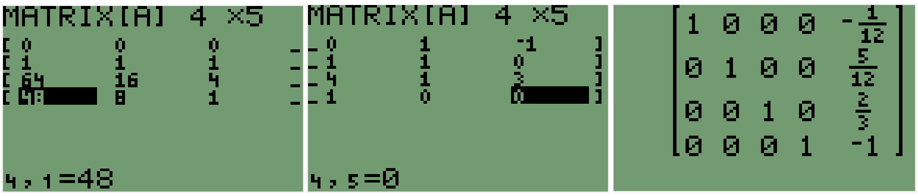
4 Suchen Sie sich aus nebenstehendem Graph einer Funktion 3. Grades Punkte mit besonderen Eigenschaften heraus, deren Koordinaten gut abzulesen sind, stellen Sie ein Gleichungssystem auf und bestimmen Sie damit rechnerisch (mit GTR) eine Funktionsgleichung für nebenstehende Kurve.



$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

1. $f(-2)=0 \rightarrow -8a+4b-2c+d=0$
2. $f(0)=-1 \rightarrow d=-1$
3. $f(1)=0 \rightarrow a+b+c+d=0$
4. $f(4)=3 \rightarrow 64a+16b+4c+d=3$
5. $f'(4)=0 \rightarrow 48a+8b+c=0$
6. $f(6)=0 \rightarrow 216a+36b+6c+d=0$

Da nur 4 Variablen vorkommen, werden 4 voneinander unabhängige Gleichungen zur Berechnung ausgewählt: 2. ; 3. ; 4. ; 5.

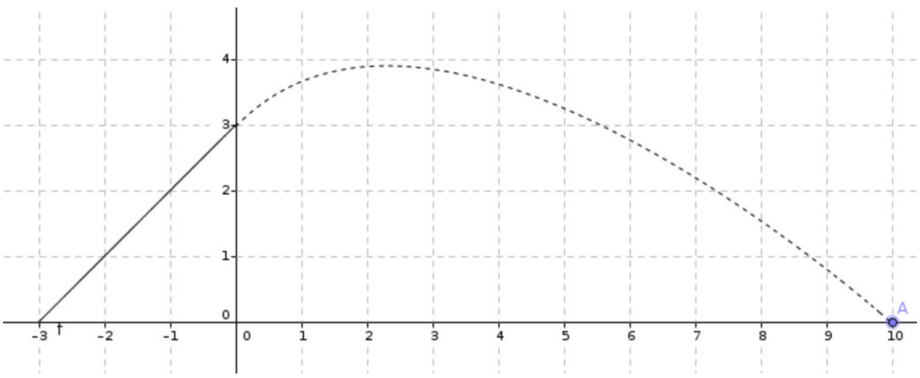


Mit der angezeigten Lösung ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x)=-\frac{1}{12}x^3+\frac{5}{12}x^2+\frac{2}{3}x-1$

---

5 In einem Vergnügungspark wird Wasser aus einem Rohr geleitet, das unter einem Winkel von 45° aufgestellt ist. Der Verlauf des Rohres kann durch dir Gleichung $y=x+3$ beschrieben werden. Bei x=0 tritt das Wasser aus, es fliegt über einen von Personen begangenen Weg und landet dann in einem Behälter, der an den Koordinaten (10/0) angebracht ist. Der Verlauf ist gepunktet angedeutet, ist so aber nicht korrekt.

Das Wasser fliegt auf einer Parabel der Form $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.
Finden Sie rechnerisch mit Hilfe eines Gleichungssystems die Werte für a, b und c heraus.



Bedingungen sind:
Im Punkt (0/3) muss die Steigung der Parabel gleich der Steigung des Rohres sein: $f'(0)=1$.
Im Punkt (0/3) müssen die Funktionswerte von Parabel und Gerade übereinstimmen: $f(0)=3$.
Der Punkt (10/0) muss auf der Parabel liegen: $f(10)=0$.

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=1 \rightarrow b=1$

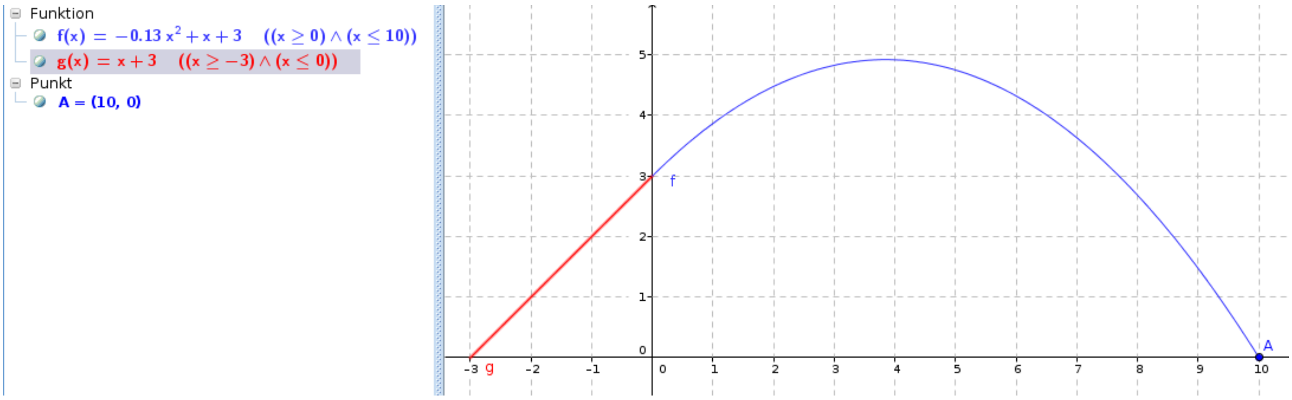
$f(0)=3 \rightarrow c=3$

$f(10)=0 \rightarrow 100a+10b+c=0$

b und c werden in die letzte Gleichung eingesetzt:

$100a+10\cdot 1+3=0 \rightarrow 100a=-13 \rightarrow a=-\frac{13}{100}=-0{,}13$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x)=-0{,}13x^2+x+3$



Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!