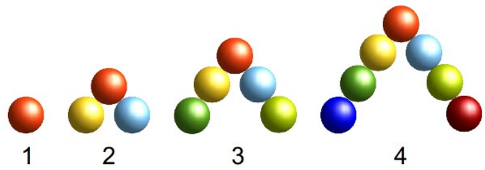
Lösung

1

Margarethe legt aus leckeren Schokostückchen Figuren, deren Anzahl eine Zahlen-Folge bilden.

Die Nummer des Folgengliedes ist jeweils angegeben.



Gib eine explizite Gleichung und eine vollständige rekursive Gleichung für die Folge an und gib an, wie viele Schokostückchen die Figur mit der Ordnungszahl 100 enthalten muss.

explizite Gleichung: $u(n)=2\cdot n-1 \quad \rightarrow \quad u(100)=2\cdot 100-1=199$

rekursive Gleichung: $u(n)=u(n-1)+2 \;\; ; \;\; u(1)=1$

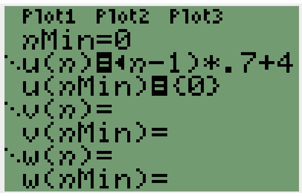
2

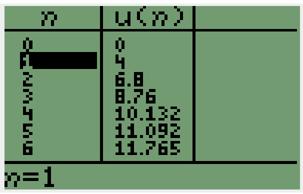
Zur Behandlung einer Krankheit muss ein Patient an jedem Tag morgens 4 mg eines Wirkstoffes zu sich nehmen. Im Laufe des Tages werden dann 30% des im Körper vorhandenen Wirkstoffes ausgeschieden.

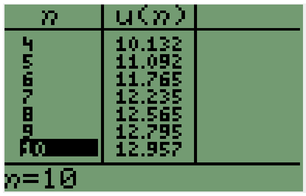
2.1 Der Patient erhält zunächst nur 10 Tabletten. Berechne, wie viel des Wirkstoffes direkt nach der Einnahme der letzten Tablette im Körper vorhanden ist.

Wenn am nächsten Tag 30% weniger Wirkstoff im Körper sind, sind es noch 70%. Daraus folgt:

rekursive Gleichung: $u(n)=u(n-1)\cdot 0{,}7+4 \;\; ; \;\; u(0)=0$



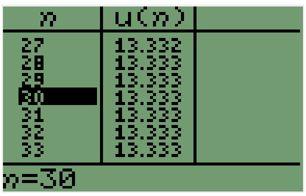




Nach Einnahme der 10. Tablette sind knapp 13 mg des Wirkstoffes im Körper.

2.2 Da der Patient das Mittel gut verträgt, wird die Behandlung mit weiteren Tabletten fortgesetzt. Berechne die Masse des Wirkstoffes, die sich nach 1 Monat (unmittelbar nach der Einnahme einer Tablette) im Körper befindet. Schätze, wie viel Wirkstoff sich nach 1 Jahr im Körper befinden wird.

Die Masse des Wirkstoffes kann man beim n-Wert 30 ablesen:



Nach 1 Monat befinden sich 13,3 mg des Wirkstoffes im Körper.

Da sich für die n-Werte um 30 immer derselbe Wert ergibt, werden sich auch nach 1 Jahr 13,3 mg im Körper befinden.

---

3 Berechne ohne Taschenrechnerhilfe die Grenzwerte der beiden Folgen. Falls eine der Folgen keinen Grenzwert besitzt, gib mit Begründung an, warum das so ist.

3.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+2-4n^2}{3+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3+n}=0$

3.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n}{4n^2+6n^3} \underset{n^3}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n}+6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

---

4 Bilde mit Hilfe der Formel $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ die Ableitung der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x)=3x^2-4$ an der Stelle $x_0=5$.

$f(x_0)=f(5)=3\cdot 5^2-4=75-4=71$

$f(x_0+h)=f(5+h)=3\cdot(5+h)^2-4=3\cdot(25+10h+h^2)-4=75+30h+3h^2-4=3h^2+30h+71$

$f'(x_0)=f'(5)=\lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-4-71}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-75}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{3\cdot(x^2-25)}{x-5}=$

$\lim\limits_{x\to 5}\frac{3\cdot(x+5)\cdot(x-5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}3\cdot(x+5)=3\cdot(5+5)=3\cdot 10=30$

$f'(x_0)=f'(5)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3h^2+30h+71-71}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3h^2+30h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3h+30)=30$

---

5 Berechne, bei welchem x-Wert der Graph mit der Funktionsgleichung $f(x)=2x^2-4x+5$ die Steigung 12 besitzt.

Der Ableitungsterm muss gleich 12 gesetzt und dann nach x aufgelöst werden:

$f'(x)=4x-4\overset{!}{=}12 \;\rightarrow\; 4x=16 \;\rightarrow\; x=4$

---

6 Gib mit Hilfe der Tangentengleichung $t_{x_0}(x)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ die Gleichung der Tangente an, die sich für $f(x)=x^3+2x$ an der Stelle $x_0=-2$ befindet.

$f(x_0)=f(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)=-8-4=-12$

$f'(x)=3x^2+2 \;\rightarrow\; f'(x_0)=f'(-2)=3\cdot(-2)^2+2=3\cdot 4+2=12+2=14$

Daraus folgt $t_{-2}(x)=14\cdot(x-(-2))+(-12)=14\cdot(x+2)-12=14x+28-12=14x+16=t_{-2}(x)$

---

7 Überprüfe, ob die Funktion $f(x)=\begin{cases} 2\cdot x-4 & \text{für } x\geq 6 \\ \frac{1}{6}\cdot x^2+3 & \text{für } x<6 \end{cases}$ differenzierbar ist.

Die 2 Teilfunktionen sind differenzierbar. Es ist also nur die Stelle x=6 zu untersuchen.

Die Funktion ist differenzierbar, wenn bei x=6 die Funktionswerte und die Werte der 1. Ableitung der Teilfunktionen übereinstimmen.

$f'(x)=2 \text{ für } x\geq 6$

$f'(x)=\frac{1}{6}\cdot 2x=\frac{1}{3}\cdot x \rightarrow \lim_{x\to 6}\left(\frac{1}{3}\cdot x\right)=\frac{6}{3}=2 \text{ für } x<6$

$f(6)=2\cdot 6-4=12-4=8$

$\lim_{x\to 6}(\frac{1}{6}\cdot x^2+3)=\frac{1}{6}\cdot 6^2+3=6+3=9 \text{ für } x<6$

Die Grenzwerte der Steigungen stimmen überein, aber die Grenzwerte der Funktionswerte unterscheiden sich.
Der Graph besitzt bei x=6 also einen Sprung. Damit ist die Funktion nicht differenzierbar.

---

8 $f(x)=|1-(7x-9)^2-2|-3x$ ist gegeben. Gesucht ist $f'(x)$.

Johannes stöhnt: „Schon wieder so eine Aufgabe mit Betragszeichen und da sollen wir auch noch die Ableitung bilden!“ Margarethe beruhigt ihn: „Schau doch genau hin und vereinfache den Funktionsterm. Dann ist es gar nicht so schlimm!“

8.1 Gib mit Begründung an, ob die Funktion differenzierbar ist oder ob sie nicht differenzierbar ist.

Im Unterricht wurde Betragsfunktionen behandelt, bei denen die Graphen Knicke aufwiesen. Die Funktionen waren deshalb nicht differenzierbar.

Hier kann man die Betragszeichen einfach weglassen, indem man bei den Summanden innerhalb der Betragszeichen die Vorzeichen bzw. Rechenzeichen ändert: Die Klammer zum Quadrat ist immer positiv. Durch das Minuszeichen davor wird also eine positive Zahl subtrahiert. Es wird sogar noch 1 subtrahiert $(1-2=-1)$*, sodass in der Klammer immer ein negativer Wert (kleiner als 0) steht. Daraus folgt:* $f(x)=|1-(7x-9)^2-2|-3x=-1+(7x-9)^2+2-3x=(7x-9)^2-3x+1$

8.2 Bilde die Ableitung, falls die Funktion differenzierbar ist.

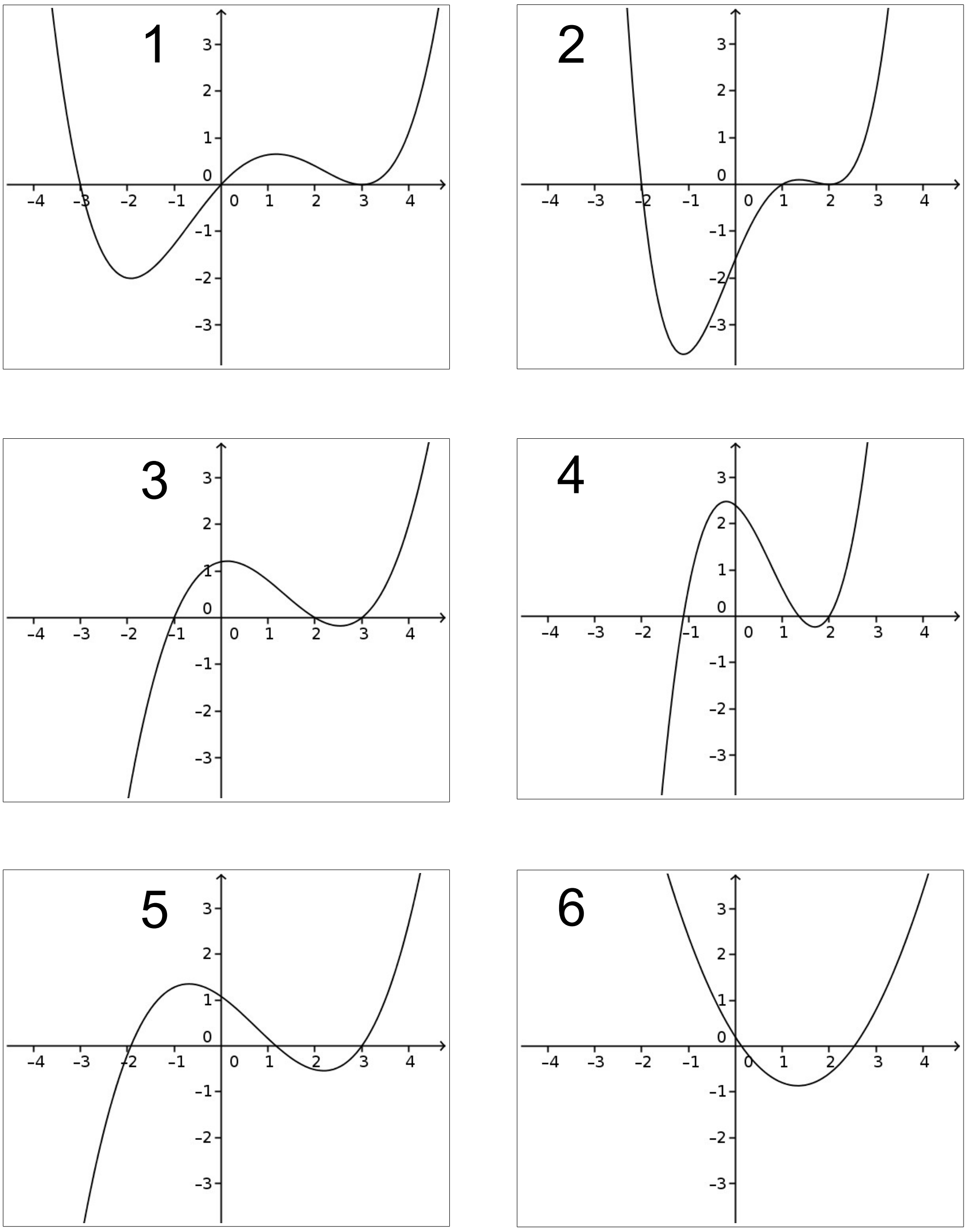
Mit der linearen Kettenregel folgt $f'(x)=2\cdot(7x-9)\cdot 7-3=98x-126-3=98x-129$

Falls die Funktion nicht differenzierbar ist, leite die Funktion $g(x)=(7-5x)^2+9x+34$ ab.

$g'(x)=2\cdot(7-5x)\cdot(-5)+9=-70+50x+9=50x-61$

---

9 Es sind 3 Funktionsgraphen mit den Graphen der jeweiligen Ableitungsfunktion dargestellt. Ordne die zusammengehörigen Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion einander eindeutig zu.



$f(x)$: Graph 3 → $f'(x)$: Graph 6

$g(x)$: Graph 1 → $g'(x)$: Graph 5

$h(x)$: Graph 2 → $h'(x)$: Graph 4

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!