2014-06-27 Klassenarbeit 4 Klasse 10e Mathematik

Lösung

1 Kreuze für die Fälle a), b), c) und d) an, ob die ganzrationale Funktion f an der Stelle x_0 <u>auf alle Fälle</u> (ja) einen Extrempunkt hat, <u>auf keinen Fall</u> (nein) einen Extrempunkt hat oder <u>ob man nicht entscheiden kann</u> (vielleicht), ob bei x_0 ein Extrempunkt vorliegt.

	$f'(x_0)=0$	$f'(x_0)\neq 0$
$f''(x_0)=0$	a)	b)
$f''(x_0)\neq 0$	c)	d)

a) ☐ ja ☐ nein ☒ vielleicht b) ☐ ja ☒ nein ☐ vielleicht

c) ☒ ja ☐ nein ☐ vielleicht d) ☐ ja ☒ nein ☐ vielleicht

---

2 Kürze den folgenden Bruch mit Hilfe von Polynomdivision: $\frac{x+2}{14+x^3-x-2x^2}=$

$$(x^3-2x^2-x+14):(x+2)=x^2-4x+7$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3+2x^2}\\
\quad -4x^2-x+14\\
\quad \underline{-4x^2-8x}\\
\qquad\qquad 7x+14\\
\qquad\qquad \underline{7x+14}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\frac{x+2}{14+x^3-x-2x^2}=\frac{x+2}{(x^2-4x+7)\cdot(x+2)}=\frac{1}{x^2-4x+7}$$

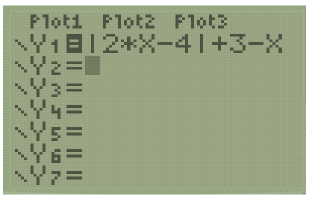
---

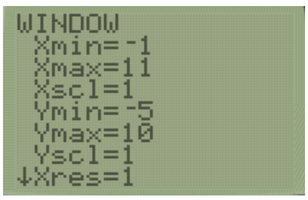
3 Die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x)=|2x-4|+3-x$ ist im Intervall $[0\leq x\leq 10]$ definiert.

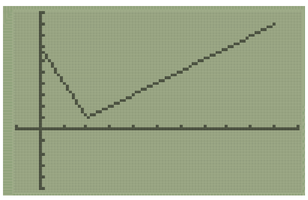
3.1 Schreibe die Funktion f in betragsfreier Darstellung (d. h. ohne Betragstriche).

$$f(x)=\begin{cases}+(2x-4)+3-x=x-1 & , \ falls\, 2\leq x\leq 10\\ -(2x-4)+3-x=-3x+7 & , \ falls\, 0\leq x\leq 2\end{cases}$$

3.2 Zeichne den Graph der Funktion im gesamten Definitionsbereich.







3.3 Untersuche den Funktionsgraph auf lokale und globale Hoch- und Tiefpunkte. Gib die Koordinaten der gefundenen Punkte an.

globales Maximum bei x=10 im Punkt $(10/f(10))=(10/9)$
lokales Maximum bei x=0 im Punkt $(0/f(0))=(0/7)$
lokales und gleichzeitig globales Minimum bei x=2 im Punkt $(2/f(2))=(2/1)$

4 Berechne algebraisch die x-Werte der Nullstellen und der Hoch- und Tiefpunkte der Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x)=x^2\cdot(x+7)\cdot(x-5)$. Überprüfe rechnerisch, ob die Extremstellen Hoch- oder Tiefpunkte sind.

Nullstellen: Der Funktionswert ist 0, wenn ein Faktor des Funktionsterms muss 0 sein.
Daraus folgen die Nullstellen $x_1=0\ ;\ x_2=-7\ ;\ x_3=+5$

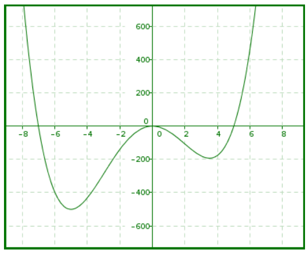
Die Extrempunkte findet man, indem man den Funktionsterm ableitet und gleich 0 setzt.
Zur Identifizierung (Hoch- oder Tiefpunkt oder Sattelpunkt) wird die 2. Ableitung an den gefundenen Stellen gebildet.

$$f(x)=x^2\cdot(x+7)\cdot(x-5)=x^2\cdot(x^2-5x+7x-35)=x^2\cdot(x^2+2x-35)=x^4+2x^3-35x^2$$

$$f'(x)=4x^3+6x^2-70x$$

$$4x^3+6x^2-70x=4x\cdot\left(x^2+\frac{6}{4}\cdot x-\frac{70}{4}\right)\rightarrow\ x_1=0\ ;\ x_{2,3}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{280}{16}}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{289}{16}}=-\frac{3}{4}\pm\frac{17}{4}$$

$$x_2=-\frac{3}{4}+\frac{17}{4}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}=3{,}5\ ;\ x_3=-\frac{3}{4}-\frac{17}{4}=-\frac{20}{4}=-5$$



$$f''(x)=12x^2+12x-70$$

$f''(x_1)=f''(0)=-70<0\ \rightarrow$ *Hochpunkt*

$f''(x_2)=f''(\frac{7}{2})=12\cdot\frac{49}{4}+12\cdot\frac{7}{2}-70=147+42-70=119>0\ \rightarrow$ *Tiefpunkt*

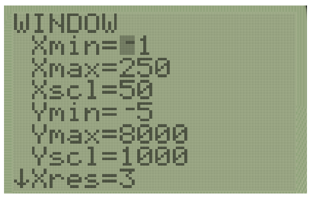
$f''(x_3)=f''(-5)=12\cdot 25+12\cdot(-5)-70=300-60-70=170>0\ \rightarrow$ *Tiefpunkt*

---

5 Ein Sportplatz besteht aus einem rechteckigen Fußballfeld mit den Seitenlängen x und y und zwei angrenzenden Rasen-Halbkreisen. Die Umrandung des gesamten Bereichs soll die Länge 400 m besitzen (Laufbahn).

5.1 Berechne, wie groß x und y gewählt werden müssen, damit die Spielfläche des Fußballfeldes möglichst groß wird.

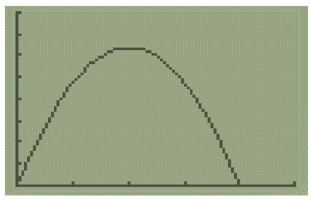
Flächeninhalt A des Fußballfeldes: $A(x,y)=x\cdot y$
Umrandung U des gesamten Bereichs (Vollkreis mit Radius y/2 und 2 Seitenkanten der Länge x: $U=2\cdot\pi\cdot\frac{y}{2}+2\cdot x=\pi\cdot y+2\cdot x\ \rightarrow\ y=\frac{U-2\cdot x}{\pi}$



$$A(x)=x\cdot\frac{U-2\cdot x}{\pi}=\frac{U}{\pi}\cdot x-\frac{2}{\pi}\cdot x^2$$

$$A'(x)=\frac{U}{\pi}-\frac{4}{\pi}\cdot x\overset{!}{=}0\ \rightarrow\ \frac{4}{\pi}\cdot x=\frac{U}{\pi}\ \rightarrow\ x=\frac{U}{4}=\frac{400\,m}{4}=100\,m\ \rightarrow$$

$$y=\frac{400-2\cdot 100}{\pi}\,m=\frac{200}{\pi}\,m\approx 63{,}7\,m$$



5.2 Üblicherweise haben Fußballfelder die Größe 68 m x 105 m.
Vergleiche diese Werte mit den von dir berechneten Werten auf Übereinstimmungen und Abweichungen.

Sowohl der x- als auch der y-Wert sind etwa 5 m größer als beim berechneten Wert.
Für einen 100m-Lauf ist es günstiger, wenn eine Strecke vorliegt, die etwas mehr als 100m gerade verläuft. Bei etwas größerem Umfang der Fläche müssen Start und Ziel beim 400m-Lauf nicht an derselben Stelle liegen.
Das Verhältnis von Breite zu Länge beträgt in Wirklichkeit $\frac{68}{105}\approx 0{,}65$ *gegenüber* $\frac{63{,}7}{100}\approx 0{,}64$ *bei den berechneten Werten. Die Werte sind fast gleich.*