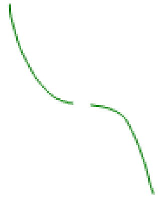
2014-03-21 Klassenarbeit 3 Klasse 10e Mathematik

Lösung

1

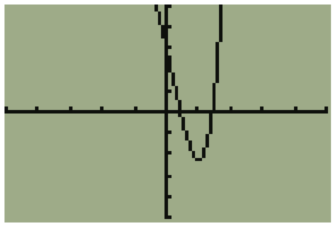
Skizziere den Globalverlauf der Funktion mit der Gleichung $f_1(x)=2x-\frac{1}{x}-x^3$.



Da der Summand mit dem größten Exponenten ($-x^3$) einen ungeraden Exponenten besitzt und außerdem negativ ist, wird der Graph global von links oben nach rechts unten verlaufen.

2

Gegeben ist die Funktion mit der Funktionsgleichung
$f_2(x)=-\frac{1}{4}\cdot x^5+2\cdot x^4-7\cdot x+3$.

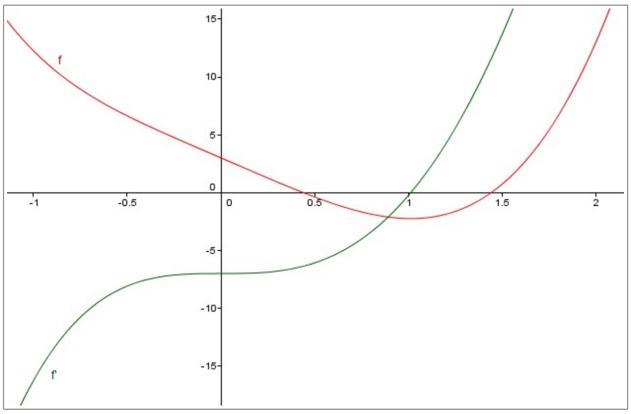


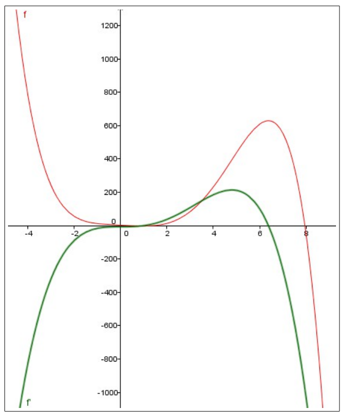
2.1 Ist es möglich, dass der nebenstehende Graph alle wesentlichen Eigenschaften (Extrema, Globalverhalten) des Funktionsgraphen zeigt? Antwort mit Begründung, nur mit Bezug auf die Funktionsgleichung.

Da der Summand mit dem größten Exponenten einen ungeraden Exponenten besitzt, kann der Funktionsgraph nicht für $x\rightarrow+\infty$ und $x\rightarrow-\infty$ dasselbe Verhalten $f_2(x)\rightarrow+\infty$ zeigen.
Es muss mindestens noch ein Maximum auf der rechten Seite geben, da der Globalverlauf von links oben nach rechts unten führt.

2.2 Ermittle, wie viele Extrema der Graph der angegebenen Funktion besitzt und gib an, wie Du das Ergebnis erhalten hast.

Der Graph vom grad 5 könnte maximal 4 Extrema besitzen. Mit verschiedenen GTR-Methoden (Graph zeichnen lassen, Maxima bzw. Minima des Graphs berechnen lassen, Nullstellen des Ableitungsgraphs berechnen lassen o. a.) kann man zeigen, dass es nur 2 Extrema gibt.





Rechnerische Methode z. B. am Ende dieser Lösung auf Seite 4.

3

Bilde die Ableitungen der Funktionen

3.1 $f_{31}(x)=7\cdot\sin(4\cdot x-1)+3\cdot x^4-8$

$f_{31}'(x)=7\cdot\cos(4\cdot x-1)\cdot4+3\cdot4\cdot x^3=28\cdot\cos(4\cdot x-1)+12\cdot x^3$

3.2 $f_{32}(x)=(5\cdot x+12)^{23}$

$f_{32}'(x)=23\cdot(5\cdot x+12)^{22}\cdot5=115\cdot(5\cdot x+12)^{22}$

4 Zeige durch Berechnung, dass der Graph der Funktion $f_4 = 2\cdot x^2 - 4\cdot x + 8$ achsensymmetrisch zur Geraden $x=1$ verläuft.

Zu zeigen ist, dass wegen $f(x)=f(-x+2u)$ und $u=1$ gilt $f_4(x)=f_4(-x+2)$.

$f_4(-x+2)=2\cdot(-x+2)^2-4\cdot(-x+2)+8=2\cdot(x^2-4x+4)+4x-8+8=2x^2-8x+8+4x=2x^2-4x+8=f_4(x)$

---

5 Untersuche rechnerisch (also nicht am Graphen ablesen!), in welchen Intervallen die Graphen der gegebenen Funktionen fallend und in welchen Intervallen sie steigend sind.

Zwischen zwei Stellen mit waagerechten Tangenten verläuft der Graph entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Zunächst müssen also die Stellen mit waagerechten Tangenten mit Hilfe der Ableitung gefunden werden. Dann wird jeweils eine Stelle aus dem Intervall auf das Vorzeichen der Steigung überprüft.

5.1 $f_{51}(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3-2\cdot x^2+3\cdot x-1$

$f_{51}'(x)=x^2-4x+3\overset{!}{=}0 \quad \xrightarrow{\text{p-q-Formel}} \quad x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm\sqrt{1}=2\pm1 \rightarrow x_1=2+1=3 \ ; \ x_2=2-1=1$

Zu untersuchen sind die Intervalle $]-\infty;1[\ ; \ ]1;3[\ ; \ ]3;+\infty[$:

$f_{51}'(0)=3>0 \ ; \ f_{51}'(2)=4-8+3=-1<0 \ ; \ f_{51}'(4)=16-16+3=3>0$

Daraus folgt, dass die Kurve für x<1 streng monoton wachsend, für 1<x<3 streng monoton fallend und für x>3 streng monoton wachsend ist.

5.2 $f_{52}(x)=x^6-6\cdot x^5$

$f_{52}(x)=6x^5-30x^4\overset{!}{=}0 \rightarrow 6x^4\cdot(x-5)=0 \rightarrow x_1=0 \ ; \ x_2=5$

Zu untersuchen sind die Intervalle $]-\infty;0[\ ; \ ]0;5[\ ; \ ]5;+\infty[$:

$f_{52}(-1)=-6-30=-36<0 \ ; \ f_{52}(1)=6-30=-24<0 \ ; \ f_{52}(6)=6\cdot6^4\cdot(6-5)=6^5\cdot1>0$

Daraus folgt, dass die Kurve für x<0 streng monoton fallend, auch für 0<x<5 streng monoton fallend und für x>5 streng monoton wachsend ist. Bei x=0 hat die Kurve einen Sattelpunkt.

---

6 Berechne die Gleichung der Tangente $t_{-1}(x)$, die bei $x=-1$ an der Kurve mit der Gleichung $f_6(x)=x^3-2\cdot x$ liegt.

Da eine Tangente eine Gerade ist, gilt $t_{-1}(x)=m\cdot x+b$ mit $t_{-1}'(x)=m$.
Tangente und Funktionsgraph stimmen am Berührpunkt in den Koordinaten und der Steigung überein:

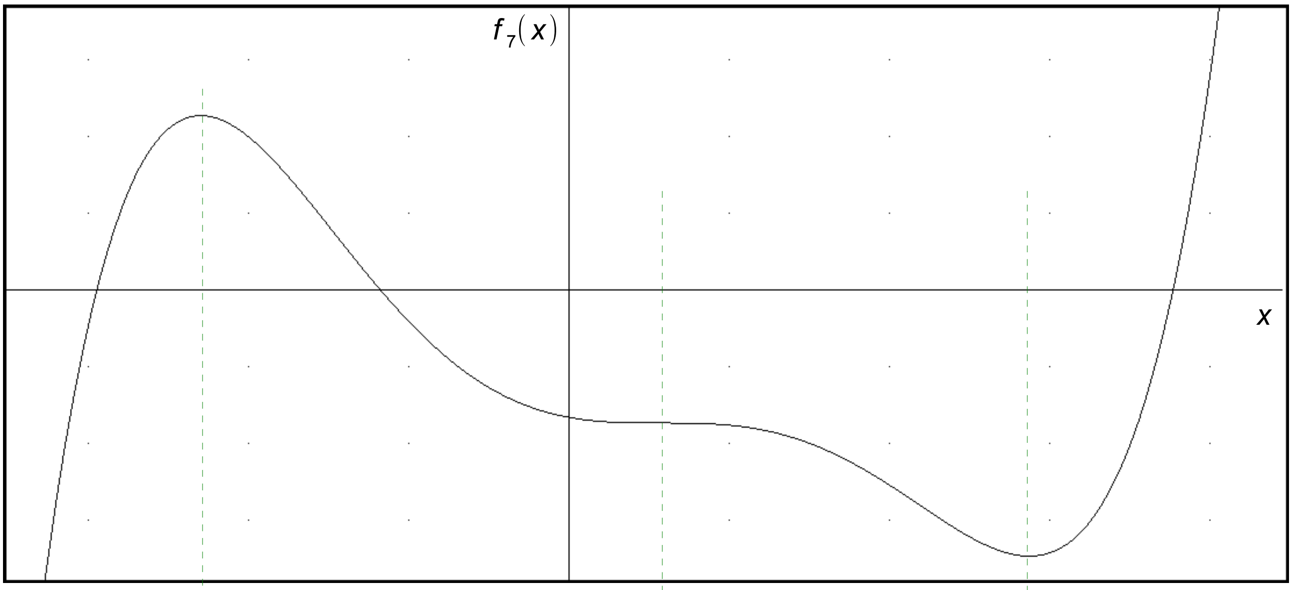
$f_6'(x)=3x^2-2 \rightarrow f_6'(-1)=3-2=1=m \rightarrow t_{-1}(x)=x+b \qquad (1)$

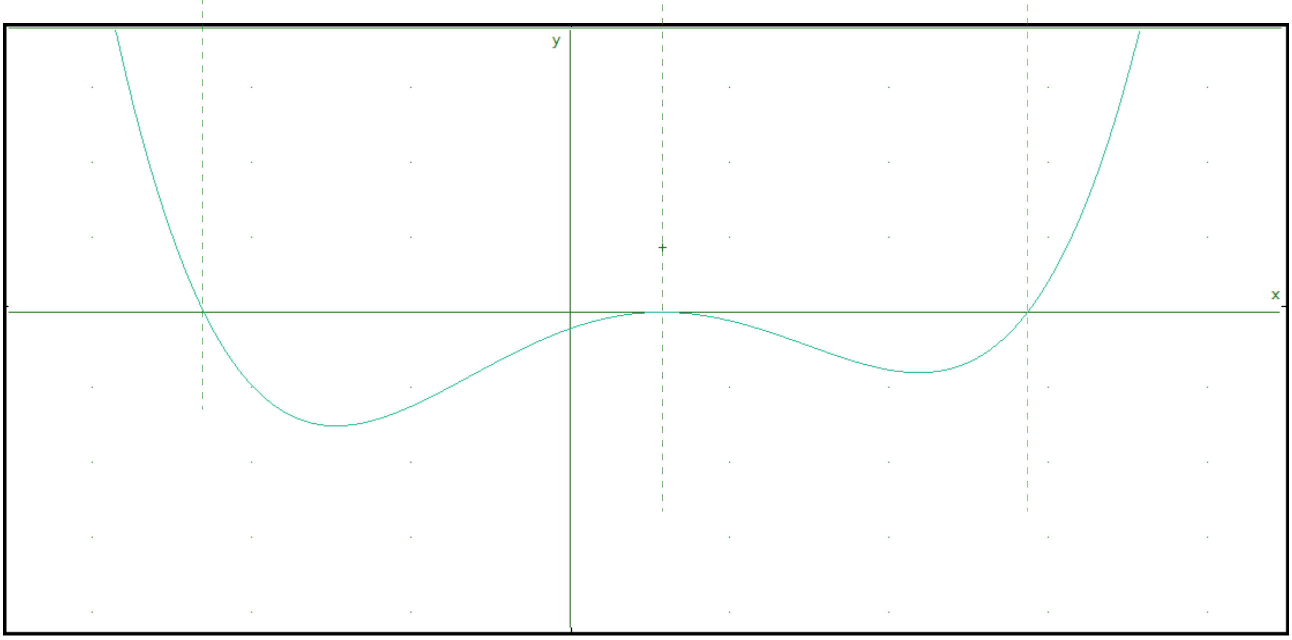
$f_6(-1)=t_{-1}(-1) \rightarrow -1+2=t_{-1}(-1) \rightarrow t_{-1}(-1)=1 \qquad (2)$

Gleichung (2) einsetzen in Gleichung (1):

$t_{-1}(-1)=1=-1+b \rightarrow b=2 \rightarrow t_{-1}(x)=x+2$

7 Bilde graphisch die Ableitung des folgenden Funktionsgraphen





Formeln

Achsensymmetrie zur y-Achse:	$f(x)=f(-x)$
Punktsymmetrie zu (0/0):	$f(x)=-f(-x)$
Achsensymmetrie zur Gerade x=u:	$f(x)=f(-x+2\cdot u)$
Punktsymmetrie zu (u/v):	$f(x)=-f(-x+2\cdot u)+2\cdot v$

VIEL ERFOLG BEI DER BEARBEITUNG DER AUFGABEN!

Nachtrag zu Aufgabe 2:

Rechnerische Methode zum Nachweis, dass es nur 2 Extrema gibt.

Die waagrechten Tangenten (und damit Extrema und Sattelpunkte) findet man mit Hilfe der Ableitung, die gleich 0 gesetzt wird:

$$f_2(x)=-\frac{1}{4}\cdot x^5+2\cdot x^4-7\cdot x+3 \rightarrow f_2'(x)=-\frac{5}{4}\cdot x^4+8\cdot x^3-7\overset{!}{=}0$$

Da die Gleichung 4. Grades nicht so einfach zu lösen ist, sucht man Intervalle für x, in denen die Gleichung garantiert keine Lösung hat.

Für x<0 sind alle 3 Summanden negativ. Es gibt also für negatives x keine Lösung der Gleichung.

Auch für den positiven Bereich kann man ein unendlich großes Intervall ohne Lösung angeben.

Dazu wird die Gleichung etwas umgeformt: $-\frac{5}{4}\cdot x^4+8\cdot x^3-7=-x^3\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot x-8\right)-7=0$.

Die Klammer wird zu 0 gesetzt: $\frac{5}{4}\cdot x-8=0 \rightarrow \frac{5}{4}\cdot x=8 \rightarrow x=8\cdot\frac{4}{5}=\frac{32}{5}=6{,}4$

Ist nun x größer als 6,4, so hat die Klammer einen positiven Wert.
-x³ hat für alle x-Werte größer als 0 einen negativen Wert.

Damit gilt: $-x^3\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot x-8\right)<0$ *, wenn x>6,4.*

Da noch zusätzlich 7 subtrahiert wird, sind also die Funktionswerte der Ableitungsfunktion für x>6,4 negativ (und damit nicht 0).

Es gibt also für x<0 und x>6,4 keine waagrechten Tangenten und damit keine Extrema.

Den Bereich zwischen x=0 und x=6,4 kann man bequem mit dem graphischen Taschenrechner untersuchen.

Es gibt also nur 2 Extrema.