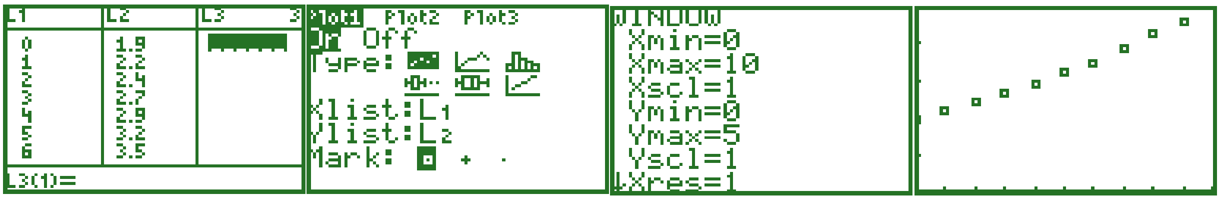
Lösung

1 Die Beobachtung eines Wachstumsprozesses liefert folgende Messwerte:

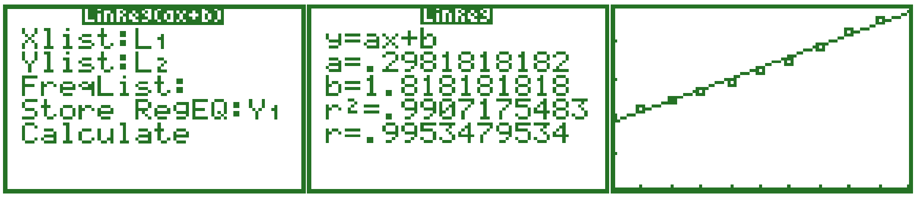
Zeit in Tagen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Menge in cm²	1,9	2,2	2,4	2,7	2,9	3,2	3,5	3,9	4,3	4,6

Führe mit dem Taschenrechner eine lineare und eine exponentielle Regression durch (Dokumentation der Ergebnisse!) und entscheide (mit Begründung!), ob es sich bei dem Wachstumsprozess um ein lineares Wachstum oder ein exponentielles Wachstum handelt.

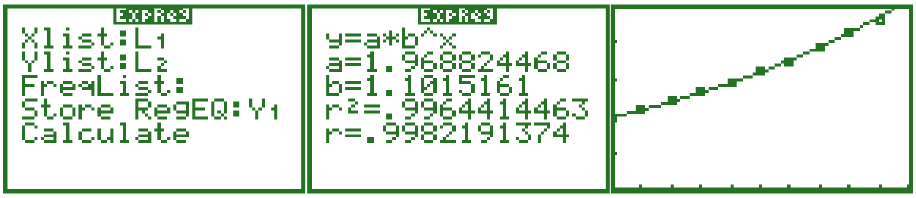
graphische Darstellung der Messwerte:



lineare Regression:



exponentielle Regression:



Man erkennt, dass beide Funktionen die Messwerte recht gut annähern, allerdings scheint auf Grund des r-Wertes die Exponentialfunktion eine bessere Übereinstimmung zu besitzen.
Die lineare Funktion ist auch aus folgendem Grund zu verwerfen: Die Messpunkte liegen links und rechts oberhalb der Ausgleichsgerade und in der Mitte unterhalb der Ausgleichsgerade. Es scheint also eine Krümmung vorzuliegen.

---

2 Die Anzahl von Radon-220-Atomen nimmt durch Kernzerfall so schnell ab, dass sich in einem Zeitraum von 3 Minuten die Anzahl auf 20% verringert.

a) Begründe, dass der Zerfallsverlauf durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann.

Da sich in gleichen Zeiträumen die Anzahl immer um denselben Faktor ändert, liegt ein exponentieller Verlauf vor.

b) Berechne den Zerfallsfaktor q in der Gleichung $N(t)=N(0)\cdot q^t$ mit t in der Einheit Minuten.

Einsetzen der Werte N(3)=20%, N(0)=100% und t=3 ergibt

$$20\%=100\%\cdot q^3 \rightarrow \frac{20}{100}=\frac{1}{5}=q^3 \rightarrow q=\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\approx 0{,}5848$$

c) Berechne, um wie viel Prozent die Menge in 1 Minute abnimmt.

Mit t=1 ergibt sich $N(1)=100\%\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{5}}=58{,}48\% \rightarrow 100\%-58{,}48\%=41{,}52\%$

Die Abnahme beträgt also rund 41,5 %.

3

Die augenblickliche Inflationsrate ist so hoch, dass bei gleich bleibender Inflationsrate nach 46 Jahren eine Ware doppelt so viel kostet wie heute.

a) Zeige rechnerisch, dass sich der Waren-Wert W im Jahr t aus folgender Gleichung berechnen lässt: $W(t)=W(0)\cdot 1{,}015^t$

Zu zeigen ist, dass die Basis den Wert 1,015 haben muss.
Dazu setzt man in die Gleichung $W(t)=W(0)\cdot q^t$ *die Werte W(t)=200%, W(0)=100% und t=46 ein:* $200\%=100\%\cdot q^{46} \rightarrow 2=q^{46} \rightarrow q=\sqrt[46]{2}\approx 1{,}01518...$
Die Aussage in der Aufgabe ist also richtig.

b) Berechne, nach wie viel Jahren die Ware um 10% teurer geworden ist.

Ansatz: W(t)=110% mit W(0)=100%. t ist gesucht.
$110\%=100\%\cdot 1{,}015^t \rightarrow 1{,}1=1{,}015^t \rightarrow t=\log_{1{,}015}1{,}1\approx 6{,}4$
Nach etwa sechseinhalb Jahren werden die Waren also um 10% teurer sein.

4

Berechne ohne Hilfe des Taschenrechners die exakten Werte für a, b, c und d:

a) $\log_a 25=2 \rightarrow a^2=25 \rightarrow a=\sqrt{25}=5$

b) $\log_3 b=\frac{1}{2} \rightarrow 3^{\frac{1}{2}}=b \rightarrow b=\sqrt{3}\approx 1{,}732$

c) $\log_{49}\sqrt[7]{7}=c \rightarrow c=\log_{49}\sqrt[7]{7}=\log_{7^2}7^{\frac{1}{7}} \rightarrow (7^2)^c=7^{2\cdot c}=7^{\frac{1}{7}} \rightarrow 2\cdot c=\frac{1}{7} \rightarrow c=\frac{1}{14}$

d) $\log_x\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^5}}=d \;=\log_x\frac{x^2}{x^{\frac{5}{4}}}=\log_x x^{2-\frac{5}{4}}=\log_x x^{\frac{8}{4}-\frac{5}{4}}=\log_x x^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}=0{,}75 \;;\; 0<x<1 \text{ oder } x>1$

5

Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\log_3(x+5)+1=\log_3 20 \rightarrow \log_3(x+5)+\log_3 3=\log_3 20 \rightarrow \log_3((x+5)\cdot 3)=\log_3 20 \rightarrow$

$(x+5)\cdot 3=20 \rightarrow 3\cdot x+15=20 \rightarrow 3\cdot x=5 \rightarrow x=\frac{5}{3}$

b) $4^{2x}=3\cdot 2^{x+3} \rightarrow \log_2 4^{2x}=\log_2(3\cdot 2^{x+3})=\log_2 3+\log_2 2^{x+3} \rightarrow 2\cdot x\cdot\log_2 4=\log_2 3+(x+3)\cdot\log_2 2$

$\rightarrow 2\cdot x\cdot 2=\log_2 3+(x+3)\cdot 1 \rightarrow 4\cdot x=\log_2 3+x+3 \rightarrow 3\cdot x=3+\log_2 3 \rightarrow x=\frac{3+\log_2 3}{3}\approx 1{,}528...$

oder

$4^{2x}=3\cdot 2^{x+3} \rightarrow (2^2)^{2x}=2^{4x}=3\cdot 2^{x+3} \rightarrow \frac{2^{4x}}{2^{x+3}}=3 \rightarrow 2^{4x-(x+3)}=2^{3x-3}=3 \rightarrow 3x-3=\log_2 3=...(s.o.)$

6 Ordne die Funktionsgleichungen und die Graphen einander eindeutig zu.
Achtung: Nicht zu jeder Kurve gibt es eine Funktionsgleichung und nicht zu jeder Funktionsgleichung gibt es eine Kurve!

B $f_1(x)=2\cdot 0{,}2^x$

E $f_2(x)=-2\cdot 0{,}9^x$

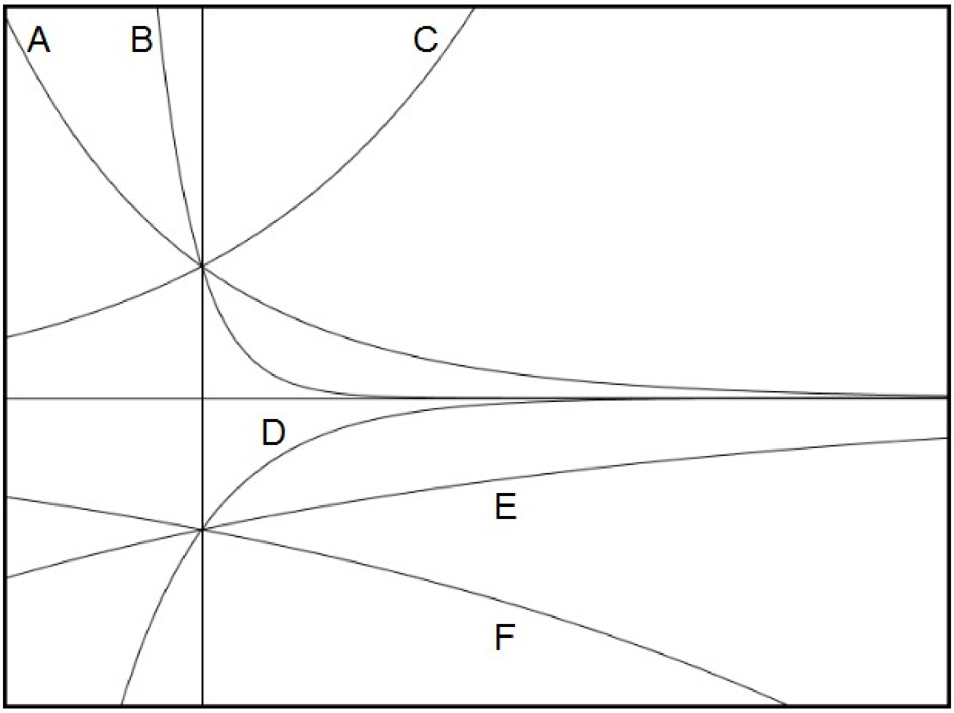
F $f_3(x)=-2\cdot 1{,}1^x$

--- $f_4(x)=-2\cdot 1{,}5^x$

A $f_5(x)=2\cdot 0{,}7^x$

C $f_6(x)=2\cdot 1{,}3^x$

keine Gleichung für D



--- $g_1(x)=\log_{3,5} x$

H $g_2(x)=\log_{1,1} x$

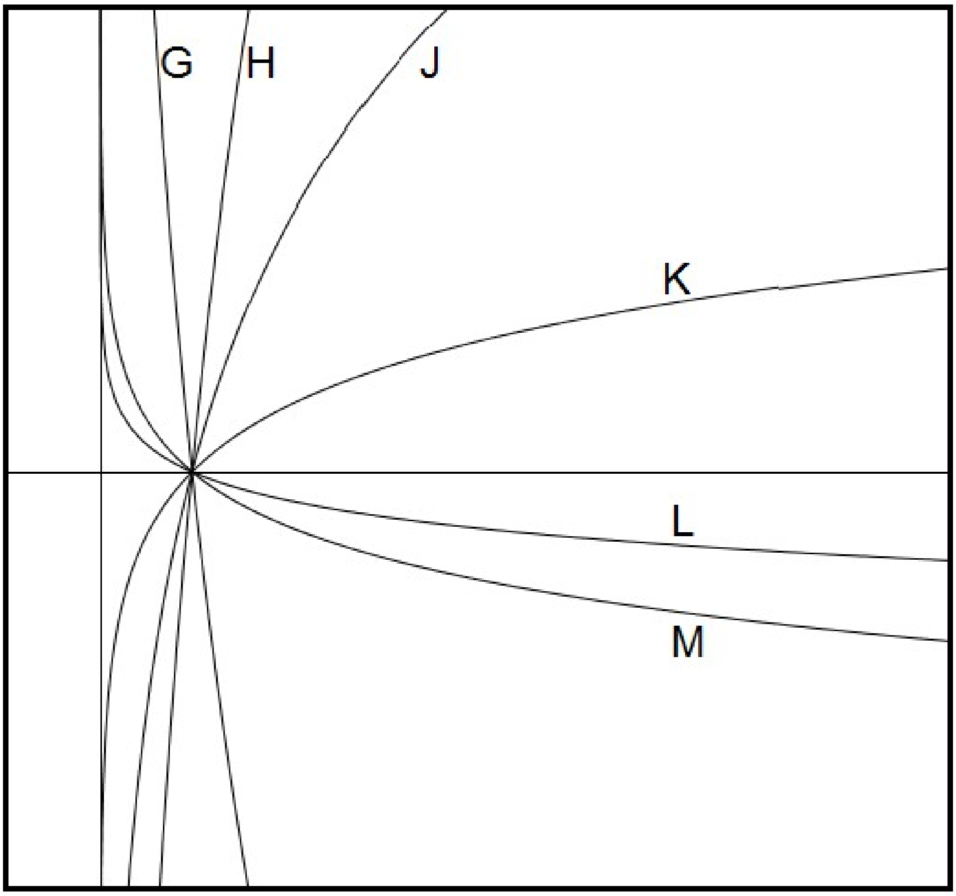
J $g_3(x)=\log_{1,3} x$

G $g_4(x)=\log_{0,9} x$

K $g_5(x)=\log_{2,7} x$

L $g_6(x)=\log_{0,1} x$

keine Gleichung für M



Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!