Lösung

1 Ordnen Sie die folgenden Funktionsgleichungen den einzelnen Graphen eindeutig zu:

a) $y_1 = \ln(2x) - 1$ 6

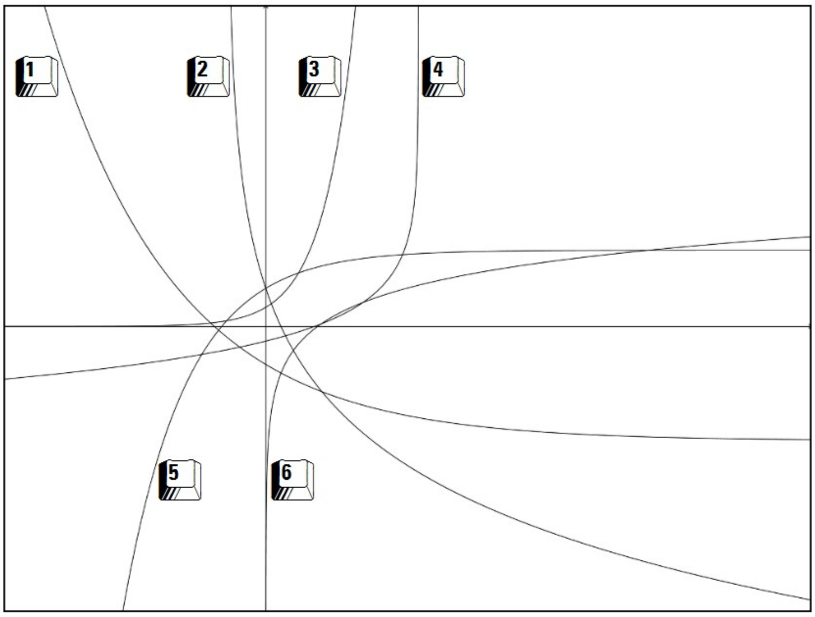
b) $y_2 = -3 + 2 \cdot e^{-0{,}3 \cdot x}$ 1

c) $y_3 = 1 - \ln(4 - x)$ 4

d) $y_4 = 0{,}5 \cdot e^{1{,}2 \cdot x}$ 3

e) $y_5 = 1 - 3 \cdot \ln(x+1)$ 2

f) $y_6 = 2 - e^{-0{,}6 \cdot x}$ 5



---

2 Johannes verdient sein erstes Geld, möchte für ein Auto sparen und hat als Sparziel 10 000 € festgelegt. Er hört mit dem Sparen auf, wenn weniger als 50 € am Sparziel fehlen, weil er dann von Oma Margaretha noch 50 € geschenkt bekommt, allerdings nur, wenn er das Geld nicht zur Bank bringt, sondern es unter seiner Matratze versteckt, so wie Oma es schon immer gemacht hat...

Folgende Szenarien sind denkbar:

1. Johannes hat noch Ersparnisse und kann deshalb zu Beginn gleich 5000 € sparen. Dann legt er jeweils an jedem weiteren Monatsanfang die Hälfte von dem Geldbetrag dazu, der noch am Sparziel 10 000 € fehlt.
2. Da Johannes im Moment sehr wenig Geld hat, legt er zu Beginn nur 1 € in den Sparstrumpf und dann jeden weiteren Monat immer genau so viel, wie in dem Sparstrumpf schon liegt.
3. Johannes will vorgehen wie bei 2., da aber nach einiger Zeit die Beträge zu hoch werden, zahlt er (wenn er etwa 5000 € gespart hat) nur noch die Hälfte von dem ein, was am Sparziel 10 000 € noch fehlt.
4. Johannes legt zu Beginn nichts in den Sparstrumpf und dann jeden Monat immer wieder genau 100 €.

a) Ordnen Sie zu jeder der 4 Möglichkeiten mit Begründung einen Wachstumsprozess zu (siehe Formeln, bei einem Szenario nur näherungsweise).

zu 1.:
ständige Abnahme der Einzahlung; Höhe der Einzahlung richtet sich nach dem noch zu zahlenden Betrag: begrenztes Wachstum

zu 2.:
ständige Verdoppelung der Einzahlungen: exponentielles Wachstum

zu 3.:
zunächst exponentielles Wachstum, dann begrenztes Wachstum: logistisches Wachstum

zu 4.:
ständig konstante Einzahlbeträge: lineares Wachstum

$k=0{,}6931$
$k=6{,}932\cdot 10^{-5}$
$k=100$
$k=0{,}6931$

b) Geben Sie die Gleichungen für 3 der 4 Wachstumsprozesse an (Werte berechnen und einsetzen). Lösungen finden Sie in der Glaskugel :-)

zu 1.:
begrenztes Wachstum:

$$f(t)=S+(a-S)\cdot e^{-k\cdot t}=10000+(5000-10000)\cdot e^{-k\cdot t}=10000-5000\cdot e^{-k\cdot t}$$

$$f(1)=7500=10000-5000\cdot e^{-k\cdot 1}\rightarrow -2500=-5000\cdot e^{-k}\rightarrow \frac{2500}{5000}=\frac{1}{2}=e^{-k}\rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)=-k\rightarrow$$

$$k=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)\rightarrow f(t)=10000-5000\cdot e^{-\ln(2)\cdot t}$$

zu 2.:
exponentielles Wachstum: $f(t)=a\cdot e^{k\cdot t}=1\cdot e^{k\cdot t}\ ;\ f(1)=2\rightarrow 2=e^{k\cdot 1}=e^{k}\rightarrow \ln 2=k\rightarrow f(t)=e^{\ln 2\cdot t}$

zu 3:

logistisches Wachstum: $$f(t)=\frac{S}{1+\left(\frac{S}{a}-1\right)\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}}=\frac{10000}{1+\left(\frac{10000}{1}-1\right)\cdot e^{-k\cdot 10000\cdot t}}=\frac{10000}{1+9999\cdot e^{-k\cdot 10000\cdot t}}$$

$$f(1)=2\rightarrow 2=\frac{10000}{1+9999\cdot e^{-k\cdot 10000}}\rightarrow 2+19998\cdot e^{-k\cdot 10000}=10000\rightarrow 19998\cdot e^{-k\cdot 10000}=9998\rightarrow$$

$$e^{-k\cdot 10000}=\frac{9998}{19998}\rightarrow -k\cdot 10000=\ln\left(\frac{9998}{19998}\right)\rightarrow k=-\frac{1}{10000}\cdot\ln\left(\frac{9998}{19998}\right)\approx 6{,}932\cdot 10^{-5}\rightarrow$$

$$f(t)=\frac{10000}{1+9999\cdot e^{-6{,}932\cdot 10^{-5}\cdot 10000\cdot t}}=\frac{10000}{1+9999\cdot e^{-0{,}6932\cdot t}}$$

zu 4.:
lineares Wachstum: $f(t)=a+k\cdot t=0+k\cdot t=k\cdot t\ ;\ f(1)=100\rightarrow 100=k\cdot 1=k\rightarrow f(t)=100\cdot t$

c) Bestimmen Sie für alle 4 Wachstumsprozesse die jeweilige Spardauer (mit Dokumentation für Rechenweg oder Taschenrechner oder ...).

zu 1.:

$$f(t)=9950=10000-5000\cdot e^{-\ln(2)\cdot t}\rightarrow -50=-5000\cdot e^{-\ln(2)\cdot t}\rightarrow \frac{50}{5000}=\frac{1}{100}=e^{-\ln(2)\cdot t}\rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{100}\right)=\ln(0{,}01)=-\ln(2)\cdot t\rightarrow t=-\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(2)}\approx 6{,}644$$ *Nach 7 Monaten ist das Sparziel erreicht.*

zu 2.:

$$f(t)=9950=e^{\ln(2)\cdot t}\rightarrow \ln(9950)=\ln(2)\cdot t\rightarrow t=\frac{\ln(9950)}{\ln(2)}\approx 13{,}28$$

Nach 14 Monaten ist das Sparziel erreicht.

zu 3.:

$$f(t)=9950=\frac{10000}{1+9999\cdot e^{-0{,}6932\cdot t}}\rightarrow 1+9999\cdot e^{-0{,}6932\cdot t}=\frac{10000}{9950}\rightarrow 9999\cdot e^{-0{,}6932\cdot t}=\frac{10000}{9950}-1=\frac{50}{9950}\rightarrow$$

$$e^{-0{,}6932\cdot t}=\frac{50}{9999\cdot 9950}\rightarrow -0{,}6932\cdot t=\ln\left(\frac{50}{9999\cdot 9950}\right)\rightarrow t=-\frac{1}{0{,}6932}\cdot\frac{50}{9999\cdot 9950}\approx 20{,}92$$

Das Sparziel ist nach 21 Monaten erreicht.

zu 4.:

$$f(t)=9950=100\cdot t\rightarrow t=\frac{9950}{100}=99{,}5$$ *Das Sparziel ist nach 100 Monaten erreicht.*

3 Gegeben ist die Funktion f(x) mit der Gleichung $f(x)=(1-x)\cdot e^x$.

a) Berechnen Sie durch algebraische Rechnung die Nullstelle(n) und den/die Extremwert(e) des Graphen.

$f(x)=(1-x)\cdot e^x=0 \overset{:e^x}{\rightarrow} 1-x=0 \overset{+x}{\rightarrow} 1=x$ *Die einzige Nullstelle liegt bei x=1.*

$f'(x) \overset{\text{Produktregel}}{=} -1\cdot e^x+(1-x)\cdot e^x=-e^x+e^x-x\cdot e^x=-x\cdot e^x \overset{!}{=} 0 \rightarrow x=0$

Bei x=0 liegt das einzige Extremum.

b) Zeigen Sie, dass $F(x)=2\cdot\left(1+e^x\right)-x\cdot e^x=2+2\cdot e^x-x\cdot e^x$ eine mögliche Stammfunktion der Funktion f(x) ist.

$F'(x)=0+2\cdot e^x-1\cdot e^x-x\cdot e^x=e^x-x\cdot e^x=(1-x)\cdot e^x=f(x)$

c) Bilden Sie die 1., 2. und 3. (und möglicherweise noch höhere) Ableitungen der Funktion f(x) und suchen Sie mit Hilfe dieser Ableitungen begründet eine einfachere Stammfunktion von f(x) als unter b) angegeben ist.

$f(x)=(1-x)\cdot e^x$
$f'(x)=(0-x)\cdot e^x$ (siehe oben)
$f''(x)=-e^x-x\cdot e^x=(-1-x)\cdot e^x$
$f'''(x)=-e^x+(-1-x)\cdot e^x=(-2-x)\cdot e^x$
....
$f^{(n)}(x)=(-n+1-x)\cdot e^x$

Bei jeder Ableitung verringert sich der Wert in der Klammer um 1, alles andere bleibt bestehen. Beim Integrieren (=Umkehrung des Differenzierens) muss sich damit der Wert in der Klammer um 1 erhöhen, also aus $f(x)=(1-x)\cdot e^x$ *wird* $F(x)=(2-x)\cdot e^x$ *.*

Probe: $F'(x)=-e^x+(2-x)\cdot e^x=-e^x+2\cdot e^x-x\cdot e^x=e^x-x\cdot e^x=(1-x)\cdot e^x=f(x)$

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von der positiven x-Achse, der positiven y-Achse und dem Graphen der Funktion f(x) vollständig eingeschlossen wird. Falls Sie die Nullstelle(n) nicht berechnen konnten, nehmen Sie eine Nullstelle bei x=2 an.

$$\int_0^1 (1-x)\cdot e^x\,dx=\left[(2-x)\cdot e^x\right]_0^1=\left((2-1)\cdot e^1\right)-\left((2-0)\cdot e^0\right)=e-2$$

Der Flächeninhalt beträgt (e-2) Flächeneinheiten.

Rechnung mit „Nullstelle" bei x=2: $\int_0^2 (1-x)\cdot e^x\,dx=\left[(2-x)\cdot e^x\right]_0^2=\left((2-2)\cdot e^2\right)-\left((2-0)\cdot e^0\right)=0-2=-2$

Dieser negativ orientierte Flächeninhalt hat natürlich keine Aussagekraft. Für den tatsächlichen Flächeninhalt hätte man über die beiden Intervalle [0,1] und [1,2] integrieren müssen, wobei man aber wieder die Nullstelle bei 1 hätte erkennen müssen.

---

4 Gegeben sind die Funktionen $g_t(x)$ mit der Gleichung $g_t(x)=\ln x-t\cdot x+t$.

a) Alle Funktionen haben (also für alle t-Werte) eine Nullstelle gemeinsam. Geben Sie diese Nullstelle an und zeigen Sie mit Begründung, dass diese Nullstelle wirklich für alle t gilt.

Auf Grund der Aussage in der Aufgabenstellung muss man die gesuchte Nullstelle auch finden können, wenn man für t den Wert 0 annimmt: $g_0(x)=\ln x$ *. Diese Funktion hat nur eine Nullstelle bei x=1. Zu zeigen ist nun noch, dass* $g_t(1)=0$ *für alle t:* $g_t(1)=\ln 1-t\cdot 1+t=0-t+t=0$

Damit ist die Behauptung in der Aufgabenstellung nachgewiesen.

b) Berechnen Sie, für welchen Wert von t die Funktion einen Extremwert bei x=0,5 besitzt.

Die Ableitungsfunktion muss beim x-Wert 0,5 eine Nullstelle haben:

$g_t'(x)=\frac{1}{x}-t+0 \rightarrow g_t'(0{,}5)=\frac{1}{0{,}5}-t\overset{!}{=}0 \rightarrow t=\frac{1}{0{,}5}=2$

An der Stelle x=0,5 besitzt die Funktion $g_2(x)=\ln x-2\cdot x+2$ *einen Extremwert.*

Formeln:

lineares Wachstum: $f(t)=a+k\cdot t$

exponentielles Wachstum: $f(t)=a\cdot e^{k\cdot t}$

begrenztes Wachstum: $f(t)=S+(a-S)\cdot e^{-k\cdot t}$

logistisches Wachstum: $f(t)=\frac{S}{1+\left(\frac{S}{a}-1\right)\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}}$

a ist jeweils der Anfangsbestand

k ist jeweils der Wachstumsfaktor

S ist jeweils die Sättigungsgrenze

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!