*Lösung*

1 Gegeben sind eine Ebene E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}$ und die beiden Geraden $g_1$ und $g_2$

$g_1$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\0\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$ ; $g_2$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade $g_1$ die Ebene E im Punkt $P(15/10/6)$ schneidet.

*Geraden- und Ebenengleichung gleichsetzen:*

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\0\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}2r+5s-2t=11\\ r+5s-5t=0\\ r+s+t=8\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2&5&-2&11\\1&5&-5&0\\1&1&1&8\end{pmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{pmatrix} \rightarrow$$

$r=5$ ; $s=1$ ; $t=2$ *Berechnung des Schnittpunktes mit t=2:* $\begin{pmatrix}11\\0\\8\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\10\\6\end{pmatrix}$ *w.z.b.w.*

b) Beweisen Sie, dass die Gerade $g_2$ in der Ebene E liegt.

*Zu zeigen ist, dass der Stützvektor der Geraden in der Ebene liegt und dass der Richtungsvektor der Geraden durch die Richtungsvektoren der Ebene erzeugt werden kann.*

$$\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}2r+5s=1\\ r+5s=3\\ r+s=-1\end{Bmatrix} \xrightarrow{(2)-(3)} 4s=4 \rightarrow s=1 \xrightarrow{(1)} 2r+5=1 \rightarrow 2r=-4 \rightarrow r=-2$$

*Einsetzen ergibt, dass diese Werte bei allen 3 Gleichungen passen. Der Aufpunkt der Geraden liegt also in der Ebene.*

$$\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}2r+5s=3\\ r+5s=4\\ r+s=0\end{Bmatrix} \xrightarrow{(3)} r=-s \xrightarrow{(2)} -s+5s=4 \rightarrow 4s=4 \rightarrow s=1 \rightarrow r=-1$$

*Einsetzen ergibt, dass diese Werte bei allen 3 Gleichungen passen. Der Richtungsvektor der Geraden ist also parallel zur Ebene.*

c) Finden Sie durch Berechnung beider Winkel heraus, ob der Winkel zwischen den beiden Geraden $g_1$ und $g_2$ übereinstimmt mit dem Winkel zwischen der Gerade $g_1$ und der Ebene E.

*Winkel zwischen den Geraden:* $\cos\alpha=\dfrac{\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+5^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+0^2}}=\dfrac{6+20+0}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{25}}=\dfrac{26}{5\cdot\sqrt{30}} \rightarrow$

$\alpha=\arccos\left(\dfrac{26}{5\cdot\sqrt{30}}\right)\approx 18{,}3\,°$

*Um den Winkel zwischen der Gerade und der Ebene herauszufinden, wird zunächst ein Vektor gesucht, der senkrecht zu Ebene verläuft. Der Winkel zwischen der Gerade $g_1$ und diesem Vektor ist dann der Ergänzungswinkel zu 90° zum Winkel zwischen Gerade und Ebene:*

*Der Vektor habe die Form* $\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$ *Dieser Vektor muss senkrecht zu den Richtungsvektoren der*

*Ebene sein:* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{=0\,!}{=} 2x+y+1=0$ ; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{=0\,!}{=} 5x+5y+1=0 \rightarrow$

*1. Gleichung:* $y=-2x-1$ *Einsetzen in 2. Gleichung:*

$5x+5\cdot(-2x-1)+1=0 \rightarrow 5x-10x-5+1=0 \rightarrow -5x=4 \rightarrow x=-\frac{4}{5}$

*Einsetzen in 1. Gleichung:* $y=-2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-1=\frac{8}{5}-\frac{5}{5}=\frac{3}{5}$

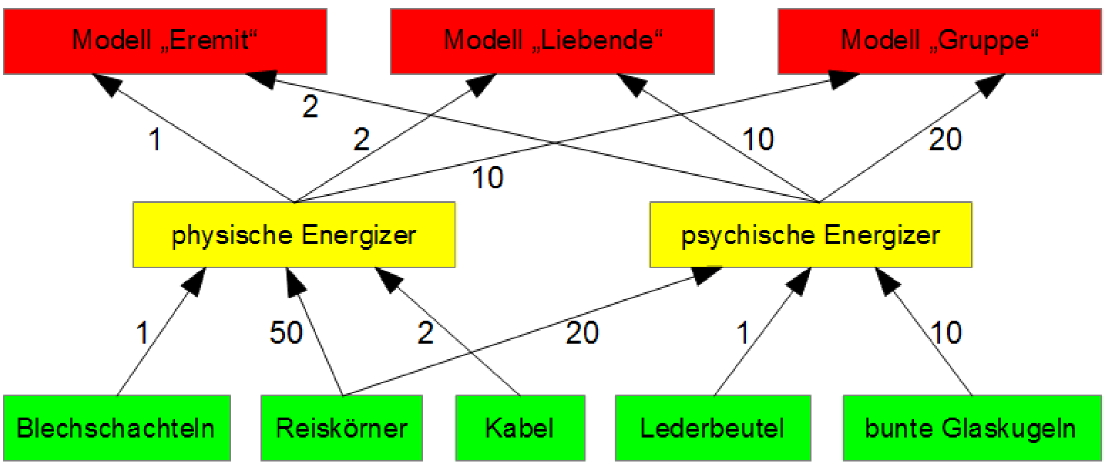
*Damit ist der Vektor* $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ *senkrecht zur Ebene, aber auch der um den Faktor 5 verlängerte Vektor* $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. *Winkel zwischen diesem Vektor und dem Richtungsvektor der Geraden $g_1$:*

$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2+3^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+5^2+1^2}}=\frac{-8+15+-5}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{30}}=\frac{2}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{30}} \rightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{30}}\right)\approx 87{,}0\,°$$

$90{,}0\,°-87{,}0\,°=3{,}0\,°$ *Die Gerade $g_1$ schließt mit der Ebene den Winkel 3,0° ein, mit der anderen Gerade aber den Winkel 18,3°. Die Winkel sind also nicht identisch.*

---

2 Pünktlich zum Weltuntergang am 21.12.2012 bietet im Internet ein Anbieter zum Selbstkostenpreis Hilfsmittel zur Bewältigung der Krise an: Schachteln mit Reis und heraushängenden Kabeln und Schmuckgegenstände, alles zum Selbstkostenpreis von 50 € bis 300 €.
Folgender Gozintograph zeigt die Verflechtung zwischen Rohstoffen, Zwischenprodukten und Endprodukten an. Die Zahlen geben die Stückzahlen an.




Es werden 400-mal „Eremit“, 200-mal „Liebende“ und 80-mal „Gruppe“ geordert.

Berechnen Sie mit Hilfe von Materialverbrauchsmatrizen oder einer Direktbedarfsmatrix, wie viel der jeweiligen Ausgangsprodukte (unten) und Zwischenprodukte (Mitte) zur Produktion des Auftrags benötigt werden.

Hinweis (fehlt in der Formelsammlung):
Sind E die Einheitsmatrix, D die Direktbedarfsmatrix, $\vec{y}$ der Auftragsvektor und $\vec{x}$ der

Produktionsvektor, so berechnet sich $\vec{x}$ aus $(E-D)^{-1} \cdot \vec{y} = \vec{x}$ .

*Materialverbrauchsmatrizen:*

| | physisch | psychisch |
|---|---|---|
| Blech | 1 | 0 |
| Reis | 50 | 20 |
| Kabel | 2 | 0 |
| Leder | 0 | 1 |
| Glas | 0 | 10 |

| | Eremit | Liebende | Gruppe |
|---|---|---|---|
| physisch | 1 | 2 | 10 |
| psychisch | 2 | 10 | 20 |

*Auftragsvektor:*

| | Anzahl |
|---|---|
| Eremit | 400 |
| Liebende | 200 |
| Gruppe | 80 |

*Das Produkt aus der 2. Materialverbrauchsmatrix mit dem Auftragsvektor ergibt die Anzahl der Zwischenprodukte:*

| | Anzahl |
|---|---|
| physisch | 1600 |
| psychisch | 4400 |

*Nun werden die beiden Materialverbrauchsmatrizen multipliziert. Es ergibt sich*

| | Eremit | Liebende | Gruppe |
|---|---|---|---|
| Blech | 1 | 2 | 10 |
| Reis | 90 | 300 | 900 |
| Kabel | 2 | 4 | 20 |
| Leder | 2 | 10 | 20 |
| Glas | 20 | 100 | 200 |

*Diese Matrix wird dann mit dem Auftragsvektor multipliziert: Aus diesem Vektor kann man ablesen, wie viel Material beschafft werden muss.*

| | Anzahl |
|---|---|
| Blech | 1600 |
| Reis | 168000 |
| Kabel | 3200 |
| Leder | 4400 |
| Glas | 44000 |

*Lösung mit Direktverbrauchsmatrix:*

| D | Eremit | Liebende | Gruppe | physisch | psychisch | Blech | Reis | Kabel | Leder | Glas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eremit | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Liebende | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Gruppe | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| physisch | 1 | 2 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| psychisch | 2 | 10 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Blech | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Reis | 0 | 0 | 0 | 50 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Kabel | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Leder | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Glas | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| y | Anzahl |
|---|---|
| Eremit | 400 |
| Liebende | 200 |
| Gruppe | 80 |
| physisch | 0 |
| psychisch | 0 |
| Blech | 0 |
| Reis | 0 |
| Kabel | 0 |
| Leder | 0 |
| Glas | 0 |

| E | Eremit | Liebende | Gruppe | physisch | psychisch | Blech | Reis | Kabel | Leder | Glas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eremit | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Liebende | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Gruppe | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| physisch | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| psychisch | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Blech | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Reis | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Kabel | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Leder | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Glas | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

| D-E | Eremit | Liebende | Gruppe | physisch | psychisch | Blech | Reis | Kabel | Leder | Glas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eremit | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Liebende | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Gruppe | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| physisch | -1 | -2 | -10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| psychisch | -2 | -10 | -20 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Blech | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Reis | 0 | 0 | 0 | -50 | -20 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Kabel | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Leder | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Glas | 0 | 0 | 0 | 0 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

| $(D-E)^{-1}$ | Eremit | Liebende | Gruppe | physisch | psychisch | Blech | Reis | Kabel | Leder | Glas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eremit | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Liebende | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Gruppe | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| physisch | 1 | 2 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| psychisch | 2 | 10 | 20 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Blech | 1 | 2 | 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Reis | 90 | 300 | 900 | 50 | 20 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Kabel | 2 | 4 | 20 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Leder | 2 | 10 | 20 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Glas | 20 | 100 | 200 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

| y | Anzahl |
|---|---|
| Eremit | 400 |
| Liebende | 200 |
| Gruppe | 80 |
| physisch | 0 |
| psychisch | 0 |
| Blech | 0 |
| Reis | 0 |
| Kabel | 0 |
| Leder | 0 |
| Glas | 0 |

| x | Anzahl |
|---|---|
| Eremit | 400 |
| Liebende | 200 |
| Gruppe | 80 |
| physisch | 1600 |
| psychisch | 4400 |
| Blech | 1600 |
| Reis | 168000 |
| Kabel | 3200 |
| Leder | 4400 |
| Glas | 44000 |

3 In der Ortschaft Mathesen gibt es 3 Discounter, Ali, Lilo und Ella. Alle Einwohner kaufen jeweils immer nur in einem dieser Läden ein. Eine jährlich durchgeführte Umfrage ergibt, dass jedes Jahr von Ali 6% zu Lilo und 10% zu Ella wechseln. Von Lilo wechseln 35% zu Ali und 15% zu Ella und von Ella wechseln 9% zu Ali und 18% zu Lilo.

Im ersten Umfragejahr kauften 4000 Einwohner bei Ali, 3500 bei Lilo und 6000 bei Ella ein.

a) Berechnen Sie, wie viel Personen im 2. Umfragejahr bei jedem Discounter einkauften.

*Erstellen der Übergangsmatrix und Multiplizieren mit dem Bestandsvektor ergibt den Ergebnisvektor:*

| | | von | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Ali | Lilo | Ella |
| nach | Ali | 0,84 | 0,35 | 0,09 |
| | Lilo | 0,06 | 0,50 | 0,18 |
| | Ella | 0,10 | 0,15 | 0,73 |

| | Käufer 1 |
|---|---|
| Ali | 4000 |
| Lilo | 3500 |
| Ella | 6000 |

| | Käufer 2 |
|---|---|
| Ali | 5125 |
| Lilo | 3070 |
| Ella | 5305 |

b) Untersuchen Sie rechnerisch, ob nach mehreren Jahren die Käuferzahlen für jeden Discounter stabil bleiben. Wenn das der Fall sein sollte, geben Sie an, ab welchem Jahr die Zahlen stabil sind (Werte mit 2 Nachkommastellen).

| | | von | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Ali | Lilo | Ella |
| nach | Ali | 0,84 | 0,35 | 0,09 |
| | Lilo | 0,06 | 0,50 | 0,18 |
| | Ella | 0,10 | 0,15 | 0,73 |

| | Käufer 1 |
|---|---|
| Ali | 4000 |
| Lilo | 3500 |
| Ella | 6000 |

| | Käufer 2 | Käufer 3 | Käufer 4 | Käufer 5 |
|---|---|---|---|---|
| Ali | 5125 | 5856,95 | 6335,04 | 6648,08 |
| Lilo | 3070 | 2797,40 | 2622,33 | 2508,94 |
| Ella | 5305 | 4845,65 | 4542,63 | 4342,97 |

→

→

| Käufer 29 | Käufer 30 | Käufer 31 | Käufer 32 | Käufer 33 | Käufer 34 |
|---|---|---|---|---|---|
| 7246,50 | 7246,50 | 7246,51 | 7246,51 | 7246,52 | 7246,52 |
| 2294,74 | 2294,74 | 2294,74 | 2294,73 | 2294,73 | 2294,73 |
| 3958,76 | 3958,76 | 3958,75 | 3958,75 | 3958,75 | 3958,75 |

*Ab dem 33. Jahr sind die Käuferzahlen stabil: Ali etwa 7200, Lilo etwa 2300, Ella etwa 4000.*

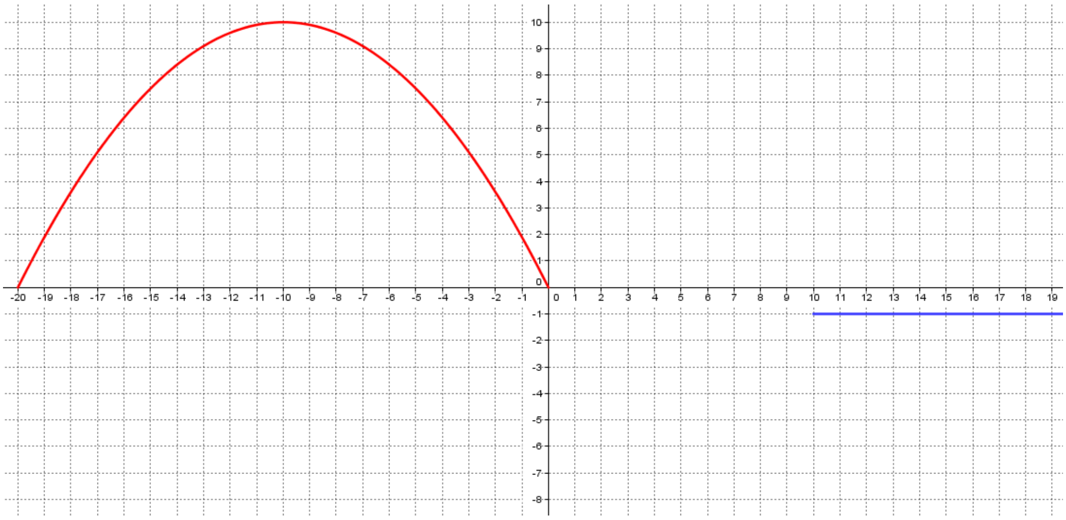
---

*Die stabilen Käuferzahlen kann man auch durch folgenden Ansatz erhalten, wobei sich allerdings nicht das Jahr ergibt, in dem (bis auf 2 Nachkommastellen) das Ergebnis konstant bleibt:*

$$\begin{pmatrix} 0{,}84 & 0{,}35 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 0{,}5 & 0{,}18 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}73 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 0{,}84 \cdot a + 0{,}35 \cdot b + 0{,}09 \cdot c = a \\ 0{,}06 \cdot a + 0{,}5 \cdot b + 0{,}18 \cdot c = b \\ 0{,}1 \cdot a + 0{,}15 \cdot b + 0{,}73 \cdot c = c \\ a + b + c = 13500 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -0{,}16 \cdot a + 0{,}35 \cdot b + 0{,}09 \cdot c = 0 \\ 0{,}06 \cdot a - 0{,}5 \cdot b + 0{,}18 \cdot c = 0 \\ 0{,}1 \cdot a + 0{,}15 \cdot b - 0{,}27 \cdot c = 0 \\ a + b + c = 13500 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}16 & 0{,}35 & 0{,}09 & 0 \\ 0{,}06 & -0{,}5 & 0{,}18 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & -0{,}27 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 13500 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7246{,}520875 \\ 0 & 1 & 0 & 2294{,}73161 \\ 0 & 0 & 1 & 3958{,}747515 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Im Erlebnispark wird demnächst ein neues Fahrgeschäft gebaut: Ein Wagen soll auf eine Parabelbahn geschossen werden und dann in einer 1 m tiefen Rinne ausrollen.
Die Funktionsgleichung der Parabel ist $f(x)=a\cdot x^2+20\cdot a\cdot x$ .
Die Funktionsgleichung für die Rinne ist durch $g(x)=-1$ gegeben.
Der höchste Punkt der Bahn liegt im Punkt (-10/10).



a) Zeigen Sie, dass für den a-Wert gilt $a=-0{,}1$ .

*Einsetzen der Koordinaten des Maximums in die Funktionsgleichung:*

$$f(x)=a\cdot x^2+20\cdot a\cdot x \rightarrow 10=a\cdot(-10)^2+20\cdot a\cdot(-10)=100\cdot a-200\cdot a=-100a \rightarrow a=\frac{10}{-100}=-0{,}1$$

b) Für den Kurvenverlauf zwischen den Punkten (0/0) und (10/-1) wird noch eine Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion gesucht. Bestimmen Sie durch Rechnung eine solche Funktion h(x), die zu einer Bahnergänzung passt, die einen knick- und ruckelfreien Anschluss ermöglicht. Tragen Sie dann zusätzlich den Kurvenverlauf in das Koordinatensystem ein.

*Es müssen die Funktionswerte, die Ableitungen und die zweiten Ableitungen an den Nahtstellen übereinstimmen, d. h. es gibt 6 Gleichungen. Damit wird eine Funktion gesucht, deren Gleichung 6 Parameter aufweist, also im einfachsten Fall eine Funktion h(x) 5. Grades:*

$$h(x)=a+b\cdot x+c\cdot x^2+d\cdot x^3+e\cdot x^4+k\cdot x^5 \rightarrow h'(x)=b+2\cdot c\cdot x+3\cdot d\cdot x^2+4\cdot e\cdot x^3+5\cdot k\cdot x^4 \rightarrow$$

$$h''(x)=2\cdot c+6\cdot d\cdot x+12\cdot e\cdot x^2+20\cdot k\cdot x^3$$

*Weiter gilt:*

$$f(x)=-0{,}1\cdot x^2-2\cdot x \rightarrow f'(x)=-0{,}2\cdot x-2 \rightarrow f''(x)=-0{,}2$$

$$g(x)=-1 \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow g''(x)=0$$

*Bedingungsgleichungen:*

$$\begin{array}{llcc}
[1] & f(0)=h(0) & \rightarrow & 0=a \\
[2] & f'(0)=h'(0) & \rightarrow & -2=b \\
[3] & f''(0)=h''(0) & \rightarrow & -0{,}2=2\cdot c \\
[4] & g(10)=h(10) & \rightarrow & -1=a+10b+100c+1000d+10000e+100000k \\
[5] & g'(10)=h'(10) & \rightarrow & 0=b+20c+300d+4000e+50000k \\
[6] & g''(x)=h''(x) & \rightarrow & 0=2c+60d+1200e+20000k
\end{array}$$

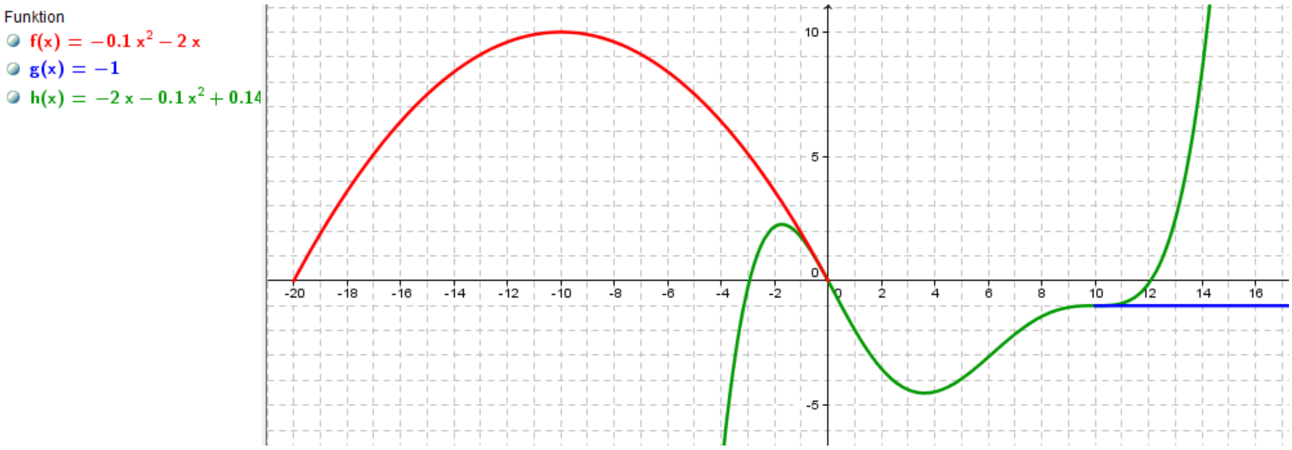
*Aus [3] folgt* $c=-0{,}1$ .

*Setzt man die Werte für a, b und c in die Gleichungen [4], [5] und [6] ein, so erhält man ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten, das mit dem Taschenrechner gelöst wird:*

$$\begin{array}{llllll} 1000d & +10000e & +100000k & = & 29 \\ 300d & +4000e & +50000k & = & 4 \\ 60d & +1200e & +20000k & = & 0{,}2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1000 & 10000 & 100000 & 29 \\ 300 & 4000 & 50000 & 4 \\ 60 & 1200 & 20000 & 0{,}2 \end{pmatrix} \xrightarrow{rref}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}14900 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}01750 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}00064 \end{pmatrix}$$ *Anmerkung: Die Werte sind exakt!*

*Damit ergibt sich für das Verbindungsstück die Funktion mit der Gleichung*
$h(x) = -2x - 0{,}1x^2 + 0{,}14x^3 - 0{,}0175x^4 + 0{,}00064x^5$




---

5 Das Auskippen einer Sandladung aus einem Kipplaster kann durch die Funktionsgleichung $V(t) = -t^2 + 5 \cdot t$ beschrieben werden, wobei t die Zeit in Sekunden angibt und der Funktionswert das Volumen des Sandes in $m^3$, das pro Sekunde herausfließt.

a) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis der Sand ganz vom Laster herabgeflossen ist.

*Beginn und Ende des Abladens findet man, indem man die Nullstellen der Funktion bestimmt (dann fleißt nämlich kein Sand herab):*

$$V(t) = -t^2 + 5t = 0 \rightarrow t \cdot (-t + 5) = 0 \rightarrow t_1 = 0 \ ; \ t_2 = 5$$

*Das Abladen des Sandes dauert also 5 s.*

b) Berechnen Sie, wie viel Sand insgesamt auf dem Kipplaster herangefahren wurde.

*Das bestimmte Integral von $t_1$ bis $t_2$ liefert das Gesamtvolumen:*

$$\int_0^5 V(t)dt = \int_0^5 (-t^2 + 5t)dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 5 \cdot \frac{t^2}{2}\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0 = -\frac{250}{6} + \frac{375}{6} = \frac{125}{6} \approx 20{,}8$$

*Insgesamt wurden also etwa 20,8 $m^3$ Sand transportiert.*

---

**Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!**