Lösung

1 Gegeben sind die Punkte A(5/-7/-3) und B(-2/7/4).

a) Stellen Sie mit Hilfe der Koordinaten der Punkte A und B eine Geradengleichung (unterschiedliche Vektoren zur Geradengleichung unter b)) auf, die zu der Geraden gehört, die durch die Punkte A und B verläuft. Geben Sie die Rechnungen an.

Der Ortsvektor zum Punkt A sei der Stützvektor und der Vektor von A nach B sei der Richtungsvektor. Dann ergibt sich $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-7\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2-5\\7-(-7)\\4-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-7\\-3\end{pmatrix}+t_1\cdot\begin{pmatrix}-7\\14\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-7\\-3\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ *als Geradengleichung. Der letzte Rechenschritt zur geeigneten Verkürzung des Richtungsvektors kann entfallen. Hier gilt* $t_2=7\cdot t_1$ *.*

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Geradengleichung g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ auch die Gerade beschreibt, die durch die Punkte A und B verläuft.
Rechnen Sie bei den nächsten Teilaufgaben mit dieser Geradengleichung g_1 weiter.

Gezeigt werden muss, dass die Punkte A und B auf der gegebenen Gerade liegen:

Punkt A: $\begin{pmatrix}5\\-7\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}5=1+t\\-7=1-2t\\-3=1-t\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}4=t\\-8=-2t\\-4=-t\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}4=t\\4=t\\4=t\end{Bmatrix}$

Punkt B: $\begin{pmatrix}-2\\7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}-2=1+t\\7=1-2t\\4=1-t\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}-3=t\\6=-2t\\3=-t\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}-3=t\\-3=t\\-3=t\end{Bmatrix}$

Da der t-Wert beim Einsetzen jedes Punktes für alle Komponenten gleich ist, liegen beide Punkte auf der Geraden.

c) Untersuchen Sie rechnerisch die Lagebeziehung zwischen den Geraden g_1 und der Geraden g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Zunächst wird untersucht, ob die Geraden parallel verlaufen, ob also die Richtungsvektoren in dieselbe Richtung zeigen:

$\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}1=r\\-2=2r\\-1=-r\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}r=1\\r=-1\\r=1\end{Bmatrix}$ *Da sich unterschiedliche Werte für den Wert r ergeben, liegen die beiden Geraden nicht parallel.*

Durch Gleichsetzen der Gleichungen erkennt man, ob sich die beiden Geraden schneiden oder windschief sind:

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}1+t=1+s\\1-2t=-1+2s\\1-t=1-s\end{Bmatrix}$ *Aus der oberen und unteren Gleichung ergibt sich jeweils, dass t = s. Daraus folgt mit der mittleren Gleichung* $1-2t=-1+2t \rightarrow 2=4t \rightarrow t=\frac{1}{2}$ *.*

Die Geraden schneiden sich also und haben den Punkt mit den Koordinaten
$\left(1+\frac{1}{2}\cdot 1/1+\frac{1}{2}\cdot(-2)/1+\frac{1}{2}\cdot(-1)\right)=\left(1+\frac{1}{2}\cdot 1/-1+\frac{1}{2}\cdot 2/1+\frac{1}{2}\cdot(-1)\right)=\left(\frac{3}{2}/0/\frac{1}{2}\right)$ *gemeinsam.*

d) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden g_1 mit der x-y-Ebene und mit der y-z-Ebene und berechnen Sie die Länge der Strecke zwischen diesen beiden Punkten.
Wenn Sie den ersten Teil der Aufgabe nicht lösen können, rechnen Sie den zweiten Teil mit den Punkten P(3/4/0) und Q(0/-5/2).

Der Schnittpunkt mit der x-y-Ebene hat die z-Koordinate 0. Daraus ergibt sich:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ 0 = 1-t \end{Bmatrix}$ *Aus der unteren Gleichung ergibt sich* $t=1$ *. Damit folgt aus der oberen Gleichung* $x=1+1=2$ *und aus der mittleren Gleichung* $y=1-2=-1$ *. Die x-y-Ebene wird also im Punkt* $P(2/-1/0)$ *geschnitten.*

Der Schnittpunkt mit der y-z-Ebene hat die x-Koordinate 0. Daraus ergibt sich:

$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 1-t \end{Bmatrix}$ *Aus der oberen Gleichung ergibt sich* $t=-1$ *. Damit folgt aus der mittleren Gleichung* $y=1+2=3$ *und aus der unteren Gleichung* $z=1+1=2$ *. Die y-z-Ebene wird also im Punkt* $Q(0/3/2)$ *geschnitten.*

Der Abstand der beiden Punkte wird mit der Formel für den Pythagoras im 3-dim-Raum berechnet:

$Abstand = \sqrt{(0-2)^2 + (3-(-1))^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24}$

Für die Ersatzpunkte gilt:

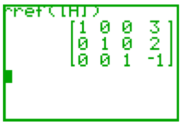
$Abstand = \sqrt{(0-3)^2 + (-5-4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+81+4} = \sqrt{94}$

e) Entscheiden Sie durch Rechnung, ob g_1 die Ebene E schneidet. Wenn das so ist, geben Sie auch die Koordinaten des Schnittpunkts an.

$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen der Geraden- und der Ebenengleichung und Verwendung des GTR:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1+t = -4+3u-2v \\ 1-2t = -4+u+3v \\ 1-t = -1+2u+5v \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} t-3u+2v = -5 \\ -2t-u-3v = -5 \\ -t-2u-5v = -2 \end{Bmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$ 

$\rightarrow t=3 \ ; \ u=2 \ ; \ v=-1$

Den Schnittpunkt kann man am besten mit der Geradengleichung berechnen und ggf. mit der Ebenengleichung bestätigen:

$\vec{x_S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 1-6 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x_S} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+6+2 \\ -4+2-3 \\ -1+4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt S hat also die Koordinaten $S(4/-5/-2)$ *.*

f) Die Geraden $g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $g_3: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 23 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden sich.

Der Parameter t soll in beiden Gleichungen denselben Wert haben und beschreibt als Zeit t, zu welchem Zeitpunkt sich ein Punkt wo auf der jeweiligen Geraden befindet.

f$_1$) Berechnen Sie, unter welchem Winkel sich die beiden Geraden schneiden.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+9+1}}=\frac{2-6-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\frac{-5}{\sqrt{84}}\ \rightarrow\ \alpha=\arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{84}}\right)\approx 123{,}1\,°$$

f$_2$) Entscheiden Sie, ob sich zur gleichen Zeit t zwei Punkte gleichzeitig auf dem Schnittpunkt befinden und damit „zusammenstoßen“.

Setzt man die Geradengleichungen gleich und ergibt sich dann für alle 3 Komponenten der gleiche t-Wert, dann stoßen die Punkte zusammen:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\-1\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \left\{\begin{matrix}1+t=23+2t\\1-2t=-1+3t\\1-t=-3+t\end{matrix}\right\}\ \rightarrow\ \left\{\begin{matrix}-22=t\\2=5t\\4=2t\end{matrix}\right\}\ \rightarrow\ \left\{\begin{matrix}t=-22\\t=\frac{2}{5}\\t=2\end{matrix}\right\}$$

Da die t-Werte verschiedenen sind, stoßen die Punkte nicht zusammen, sondern passieren nacheinander den Schnittpunkt der beiden Geraden.

g) Die Gleichung von g_3 wird folgendermaßen abgeändert: $g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}23\\-1\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix}$.

Geben Sie mit Begründung an, ob man den Wert für den Parameter a so wählen kann, dass die beiden Geraden g_1 und g_3 parallel bzw. senkrecht verlaufen können und geben Sie gegebenenfalls Werte für a an.

Sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander, so sind die Geraden parallel:

$\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \left\{\begin{matrix}a=r\\3=-2r\\1=-r\end{matrix}\right\}$ *Aus der unteren Gleichung folgt* $r=-1$ *. Eingesetzt in die mittlere Gleichung ergibt sich* $3=2$ *. Diese Aussage ist falsch. Also sind die Geraden niemals (also auch für kein a) parallel.*

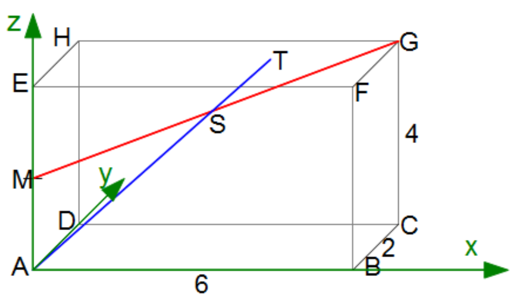
Sind die Geraden senkrecht zueinander, so ist das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren gleich 0:

$\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=a-6-1\overset{!}{=}0\ \rightarrow\ a=7$ *Für* $a=7$ *sind also die beiden Geraden parallel zueinander.*

---

2 In einem Quader mit den Seitenlängen AB=6, BC=2 und CG=4 sind die beiden Strecken MG und AT eingezeichnet.
M ist der Mittelpunkt der Strecke AE.
S ist der Mittelpunkt der Strecke MG.
Die beiden Strecken schneiden sich im Punkt S.
T liegt auf der Rechtecksebene EFGH.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T.



Für die Geraden, die die blaue bzw. rote Strecke enthalten, gelten folgende Gleichungen:

$$\vec{x}=\overrightarrow{AM}+s\cdot\overrightarrow{MG}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}\qquad \vec{x}=t\cdot\overrightarrow{AS}=t\cdot\left(\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{MG}\right)=t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$$

T ergibt sich als Durchstoßpunkt der blauen Geraden durch die Ebene EFGH, für die $z=4$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} x=3t \\ y=t \\ 4=3t \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{untere Gleichung}} t=\frac{4}{3} \rightarrow x=\frac{4}{3}\cdot 3=4 \;;\; y=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$$

T hat also die Koordinaten $T\left(4/\frac{4}{3}/4\right)$.

---

3 Die Gerade g_4: $\vec{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ c \end{pmatrix}$ ist gegeben.

Untersuchen Sie rechnerisch, welchen Wert c annehmen muss, damit die Gerade die x-Achse bei 10 schneidet.

Für Schnittpunkte mit der x-Achse ist der y-Wert gleich 0. Für den Schnittpunkt bei x=10 gilt dann

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} 10=2+4t \\ 0=1+t\cdot c \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{obere Gleichung}} 8=4t \rightarrow t=2 \xrightarrow{\text{untere Gleichung}} 0=1+2c \rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

---

4 Zeigen Sie rechnerisch, dass die Ebenengleichungen zu den Ebenen E_1 und E_2 dieselbe Ebene beschreiben.

$$E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \;;\; E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, das zu zeigen:

1. *Jeder Richtungsvektor der einen Ebene lässt sich durch die Richtungsvektoren der anderen Ebene beschreiben und die Aufpunkte der Ebenen sind in der anderen Ebene enthalten.*
2. *Jeder Richtungsvektor der einen Ebene und der Verbindungsvektor der Aufpunkte lässt sich durch die Richtungsvektoren der anderen Ebene beschreiben.*
3. *Man wählt 3 beliebige Punkte aus der einen Ebene, die aber nicht auf einer Geraden liegen, und zeigt dann, dass diese Punkte auch in der anderen Ebene liegen.*
4. *Setzt man die Ebenengleichungen gleich, so gibt es 3 Möglichkeiten:*
   a) das Gleichungssystem hat keine Lösung → die Ebenen sind parallel
   b) ein Parameter kann frei gewählt werden → die Ebenen schneiden sich in einer Geraden
   c) zwei Parameter können frei gewählt werden → die Ebenen sind identisch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} 4a-b-3c+5d=-5 \\ -2a+b+c-3d=3 \\ 3a+4b-7c-d=1 \end{matrix} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 & 5 & -5 \\ -2 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{rref} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es bleiben nur 2 Gleichungen übrig, die 3. Gleichung ist immer richtig (0=0)

$a-c+d=-1$ bzw. $a=c-d-1$

$b-c-d=1$ bzw. $b=c+d+1$

c und d können also beliebig gewählt werden → die Ebenen sind identisch.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!