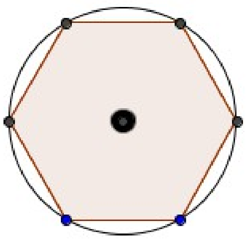
2013-06-07 Klassenarbeit 4 Klasse 9e Mathematik

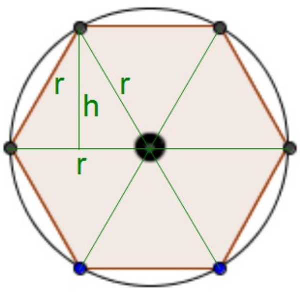
Lösung

1 Aus Rundhölzern mit dem Durchmesser 2 cm sollen dicke Buntstifte mit einem größtmöglichen regelmäßigen Sechseck als Querschnittsfläche hergestellt werden.
Um die Buntstiftmine einsetzen zu können, wird im Zentrum der Buntstifte ein Zylinder mit 2 mm Durchmesser ausgebohrt.

Berechne, wieviel Holz bei einem 30 cm langen Buntstift als Abfall verloren geht und gib diesen Wert auch in Prozent an.



Zunächst muss der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks berechnet werden. Das Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge r. Die Höhe dieser Dreiecke berechnet sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras zu $h^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2=r^2 \rightarrow h=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}\cdot r^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r$.



Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt $A_{Dreieck}=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot r^2$.

Die 6 Dreiecke haben dann den Flächeninhalt

$$A_{Sechseck}=6\cdot A_{Dreieck}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot r^2 \overset{r=1}{=} \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}598\ .$$

Rundholz-Querschnittsfläche: $A_{Rundholz}=\pi\cdot r^2 \overset{r=1}{=} \pi\approx 3{,}142$

Querschnittsfläche der Mine: $A_{Mine}=\pi\cdot r^2=\pi\cdot 0{,}1^2\approx 0{,}03142$

Nicht genutzte Fläche: $A_{Rundholz}-(A_{Sechseck}-A_{Mine})=\pi-\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}-\pi\cdot 0{,}1^2\right)\approx 0{,}5749$

Nicht genutzte Fläche in Prozent: $\frac{A_{Rundholz}-(A_{Sechseck}-A_{Mine})}{A_{Rundholz}}\cdot 100=\frac{\pi-\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}-\pi\cdot 0{,}1^2\right)}{\pi}\cdot 100\approx 18{,}3$

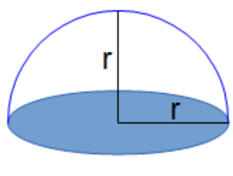
Die Verluste an Holz betragen also bei der Bearbeitung 18,3%.

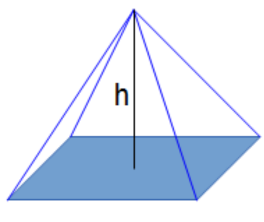
Verlust an Holz bei einem 30 cm langen Bleistift: $V_{Verlust}=A_{nicht\,genutzt}\cdot h\approx 0{,}5749\cdot 30\approx 17{,}2$
Der Verlust beträgt also etwa 17,2 cm³.

---

2 Eine Halbkugel mit dem gegebenen Radius r und eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche haben das gleiche Volumen. Ihre Grundflächen besitzen gleichen Flächeninhalt.

Berechne die Höhe h der Pyramide.





Der Flächeninhalt der Grundfläche der Kugel beträgt $\pi\cdot r^2$.
Damit hat auch die Grundfläche der Pyramide den Flächeninhalt $\pi\cdot r^2$.

Das Volumen der Halbkugel ist $V_{Halbkugel}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3$.

Das Volumen der Pyramide ist $V_{Pyramide}=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$

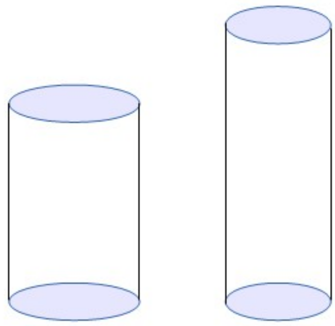
Die beiden Volumina sollen gleich sein, also gilt:

$V_{Halbkugel} = V_{Pyramide} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow 2 \cdot r = h$

Die Höhe h der Pyramide ist also doppelt so groß wie der Radius der Kugel oder genau so groß wie der Durchmesser der Kugel.

---

3 Eine Würstchendose (links) mit 20 cm langen Würstchen besitzt die Höhe h = 20 cm und den Grundkreisdurchmesser d = 10 cm. Nun möchte die Firma 25 cm lange Würstchen verpacken, dabei das Volumen der Dose aber gleich lassen.



a) Zeige rechnerisch, dass dann bei der entsprechenden Würstchendose (rechts) der Radius der Grundfläche $r = \sqrt{20}\,cm$ betragen muss.

Volumen der linken Dose: $V_{20} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = \pi \cdot 25 \cdot 20 = 500 \cdot \pi$

Volumen der rechten Dose: $V_{25} = \pi \cdot r^2 \cdot 25$

Die Volumina sind gleich: $V_{25} = V_{20} \rightarrow 25 \cdot \pi \cdot r^2 = 500 \cdot \pi \rightarrow r^2 = \frac{500 \cdot \pi}{25 \cdot \pi} = 20 \rightarrow r = \sqrt{20}$

Der gesuchte Radius beträgt also $\sqrt{20}\,cm$ *.*

b) Der Materialverbrauch soll bei der neuen Dose (rechts) aus Kostengründen nicht mehr als 5% größer werden.
Überprüfe, ob die Bedingung eingehalten wird, indem Du zunächst die Oberflächen beider Dosen berechnest.

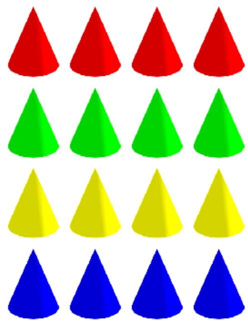
Oberfläche linke Dose: $O_{20} = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right) \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 20 = (50 + 200) \cdot \pi \approx 785{,}4$

Oberfläche rechte Dose: $O_{25} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 20 + 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{20} \cdot 25 = (40 + 50 \cdot \sqrt{20}) \cdot \pi \approx 828{,}1$

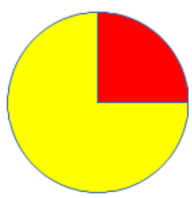
Die Differenz der Oberflächeninhalte beträgt etwa $828{,}1 - 785{,}4 = 42{,}7$ *, das sind in Prozent bezogen auf die 20 cm hohe Dose* $\frac{42{,}7}{785{,}4} \cdot 100 \approx 5{,}4$ *. Die Bedingung ist nicht eingehalten, da das Volumen der höheren Dose um etwas mehr als 5% (5,4%) größer ist als das Volumen der anderen Dose.*

---

4 Margarethe und Johannes möchten Spielfiguren für ein Würfelspiel basteln. Dazu zerschneiden Sie 4 Kreise aus Tonpapier (rot, blau, gelb, grün) in jeweils 4 gleiche Flächen und bilden daraus Kegel (Klebekanten werden vernachlässigt).
Die Kreise haben einen Radius von 12 cm.



Die Kegel bestehen jeweils aus einem Viertelkreis der Tonpapierkreise.
Die Tonpapierkreise haben den Flächeninhalt $\pi \cdot 12^2 = 144 \cdot \pi$ *.*
Der Kegelmantel hat die Seitenlänge 12 cm und ein Viertel des Flächeninhaltes: $M_{Kegel} = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r \cdot 12 = \frac{1}{4} \cdot 144 \cdot \pi = 36 \cdot \pi \rightarrow r = \frac{36 \cdot \pi}{12 \cdot \pi} = 3$

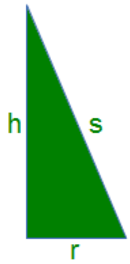


Berechne

a) den Flächeninhalt der Grundfläche,

$A_{Grundfläche}=\pi\cdot r^2=\pi\cdot 3^2=9\cdot\pi\approx 28{,}3$ *Die Grundfläche hat etwa den Flächeninhalt 28,3 cm².*

b) die Höhe



Die Höhe ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

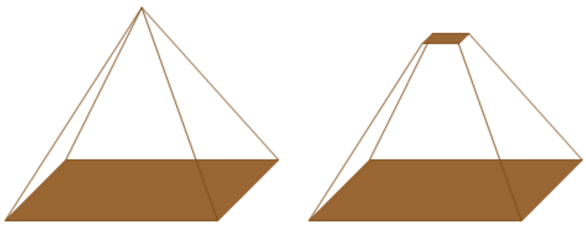
$h^2+r^2=s^2 \rightarrow h=\sqrt{s^2-r^2}=\sqrt{12^2-3^2}=\sqrt{144-9}=\sqrt{135}\approx 11{,}6$

Die Höhe hat etwa die Länge 11,6 cm.

der Kegel.

---

5 Die Cheopspyramide hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge 233,0 m. Ursprünglich betrug die Höhe 146,6 m. Heute ist die Pyramide aber um 10 m kleiner, weil im Lauf der Jahrhunderte Material für Bauzwecke von der Pyramide gestohlen wurde.



a) Berechne das ursprüngliche Volumen der Pyramide.

$V_{Cheops}=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 233^2\cdot 146{,}6=2652922{,}5$

Das Volumen betrug etwa 2653000 m³.

b) Berechne, wieviel Material entwendet wurde (Volumen dieses Materials angeben).

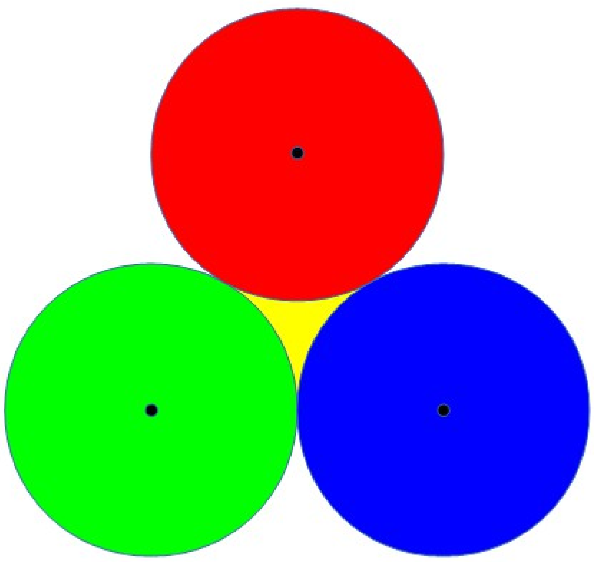
Mit Hilfe des Strahlensatzes (oder einer Verhältnisgleichung) kann man die Seitenkante a der entwendeten Pyramide berechnen: $\frac{10}{146{,}6}=\frac{a}{233} \rightarrow a=\frac{10\cdot 233}{146{,}6}\approx 15{,}9$

Daraus ergibt sich das Volumen zu $V_{entwendet}=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 15{,}9^2\cdot 10\approx 842$

Es sind also etwa 842 m³ Material entwendet worden.

---

6 Die 3 Kreise besitzen jeweils den Radius r = 5 cm.



Berechne

a) den Flächeninhalt und

Als Hilfsfigur sollte man sich ein gleichseitiges Dreieck einzeichnen, dessen Eckpunkte in den Mittelpunkten der Kreise liegen (siehe nächste Seite. Dieses Dreieck besteht aus 3 Sechstel-Kreisen (gleichseitige Dreiecke haben Winkel von 60°) und der gesuchten Fläche.
Wie schon in Aufgabe 1 gezeigt wurde, berechnet sich der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge s zu

$A_{gleichseitiges\ Dreieck}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2 \overset{s=2\cdot r}{=} =\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4r^2 \overset{r=5}{=} 25\cdot\sqrt{3}$.

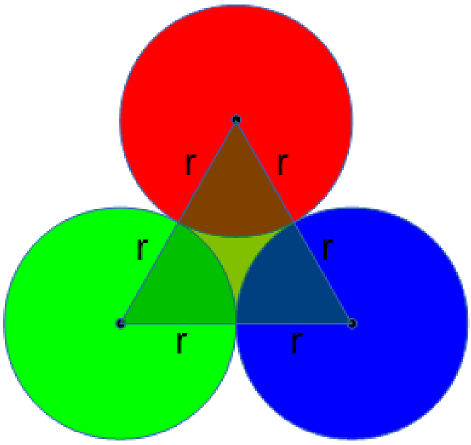
Die Kreisausschnitte haben jeweils den Flächeninhalt $A_{Kreisausschnitt}=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 5^2=\frac{25}{6}\cdot\pi$.

3 Kreisausschnitte haben also den Flächeninhalt $A_{3\,Teile}=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 5^2=\frac{25}{2}\cdot\pi$

Subtrahiert man von der Dreiecksfläche die Fläche der 3 Kreisausschnitte, erhält man die gesuchte Fläche:

$$A_{gesucht}=A_{gleichseitiges\,Dreieck}-A_{3\,Teile}=25\cdot\sqrt{3}-\frac{25}{2}\cdot\pi\approx 4$$

Die gesuchte Fläche hat also etwa den Flächeninhalt 4 cm².



b) den Umfang
der kleinen Fläche („Dreieck mit gekrümmten Seiten“), die ganz von den 3 Kreisen eingeschlossen wird.

Der Umfang eines Kreises beträgt $U_{Kreis}=2\cdot\pi\cdot r$.
Wegen der 60°-Winkel im Dreieck wird die eingeschlossene Fläche durch 60°-Kreisbögen begrenzt:

$$b_{60°}=\frac{1}{6}\cdot U_{Kreis}=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\pi\cdot r=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r$$

Da die Fläche durch 3 Kreisbögen begrenzt wird, ergibt sich für den Umfang der gesuchten Fläche

$$U_{Fläche}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r=\pi\cdot r=\pi\cdot 5\approx 15{,}7$$

Der Umfang der gesuchten Fläche beträgt also etwa 15,7 cm und ist halb so groß wie der Umfang eines einzelnen Kreises.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!