2013-02-22 Klassenarbeit 3 Klasse 9e Mathematik

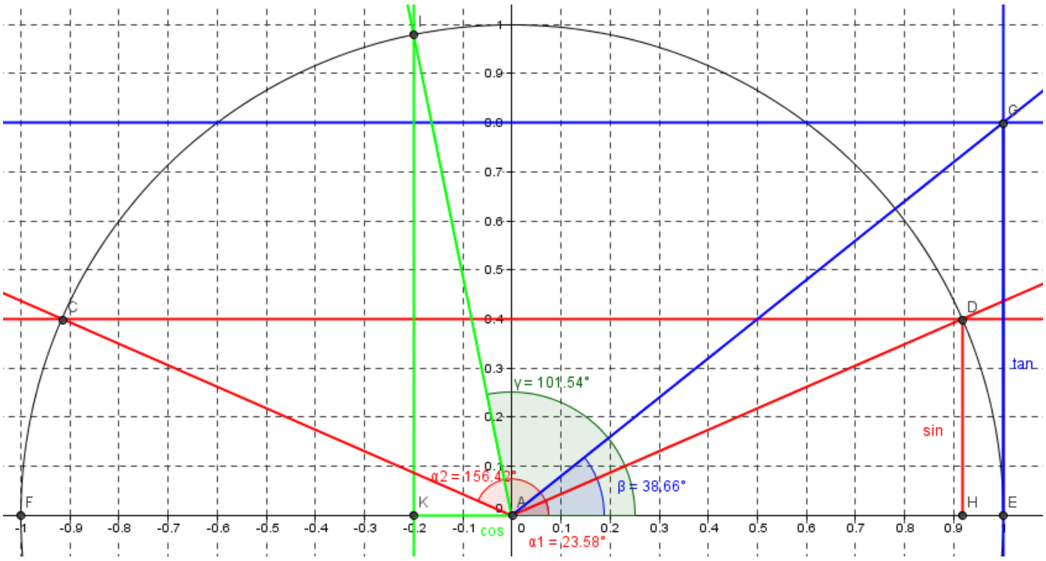
Lösung

1 Trage benötigte Hilfslinien ein und lies am Einheitskreis die Werte für α, β und γ ab.

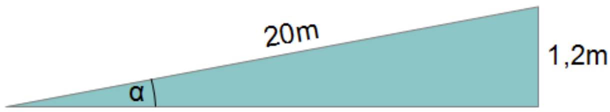
a) $\sin\alpha=0{,}4$ (2 Lösungen!) $\alpha_1=23{,}58°$; $\alpha_2=156{,}42°$

b) $\tan\beta=0{,}8$ $\beta=38{,}66°$

c) $\cos\gamma=-0{,}2$ $\gamma=101{,}54°$



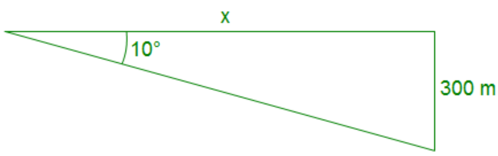
2 Vor einem Lagerhaus ist eine Rampe angebracht, auf der auf einer Strecke von 20 m eine Höhe von 1,2 m überwunden wird. Berechne den Steigungswinkel α dieser Rampe.



Das Dreieck ist rechtwinklig. Man kann α also einfach über den Sinus berechnen:

$$\sin\alpha=\frac{1{,}2\,m}{20\,m}=\frac{12}{200}=\frac{6}{100}=0{,}06 \rightarrow \alpha=\arcsin 0{,}06\approx 3{,}4°$$

3 Ein Sportflugzeug fliegt 300 m oberhalb des Erdbodens. Man sieht die GFS unter dem Tiefenwinkel 10° (Tiefenwinkel: Winkel von der waagrechten Blickrichtung nach unten). Berechne, wie weit die GFS „über Grund“ (also in waagrechter Ausdehnung) noch entfernt ist.

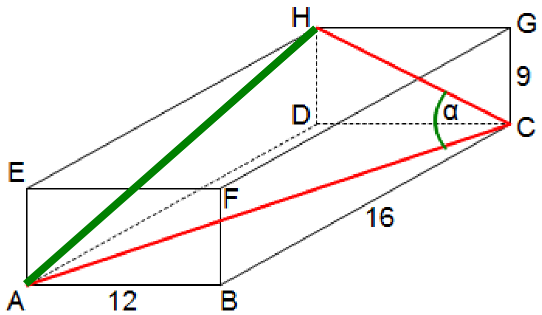


Gesucht ist die Länge der Seite x. Da das Dreieck rechtwinklig ist, kann man die Seitenlänge mit dem Tangens berechnen:

$$\tan 10°=\frac{300\,m}{x} \rightarrow x=\frac{300\,m}{\tan 10°}\approx 1701\,m\approx 1700\,m=1{,}7\,km$$

Die Schule ist als noch etwa 1,7 km entfernt.

4 In einem Quader sind 2 Strecken AC und CH markiert. Diese Strecken sind Schenkel des Winkels α.
Berechne den Winkelwert des Winkels α.



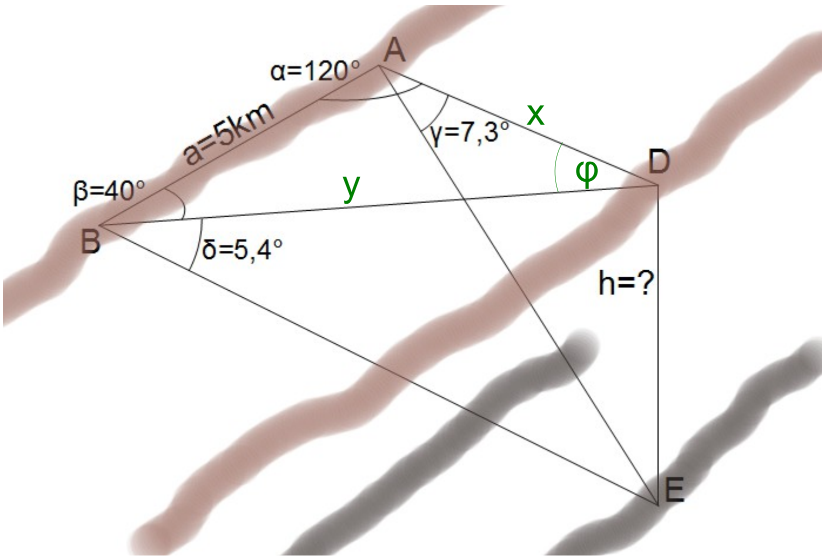
Trägt man noch die Strecke AH ein, so ergibt sich ein (nicht-rechtwinkliges) Dreieck, mit dem man über den Kosinussatz den Winkel α berechnen kann:

$AC=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20$
$CH=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$
$AH^2=9^2+16^2=81+256=337$

$AH^2=AC^2+CH^2-2\cdot AC\cdot CH\cdot\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha=\frac{AC^2+CH^2-AH^2}{2\cdot AC\cdot CH}=\frac{400+225-337}{2\cdot 20\cdot 15}=\frac{288}{600}=0{,}48 \rightarrow$

$\cos\alpha=0{,}48 \rightarrow \alpha=\arccos 0{,}48\approx 61{,}3°$

5



Noon Day Rest in Marble Canyon' from the second Powell Expedition 1872

Quelle:
http://de.wikipedia.org/wiki/Grand_Canyon
abgerufen: 2013-02-20, 19:00 Uhr

Im Grand Canyon fallen die Wände der Schlucht teilweise senkrecht nach unten ab. Um die Tiefe zu bestimmen, hat man an einer Kante der Schlucht zwischen den Punkten A und B die Strecke $a=5\,km$ abgemessen.
Auf der gegenüberliegenden Kante befindet sich auf gleicher Höhe der Punkt D.
Senkrecht unter D kann man am Grund des Canyons den Punkt E erkennen.
Die Sichtwinkel von den Enden der Beobachtungsstrecke zu den anderen Punkten sind in die Skizze eingezeichnet.
Berechne die Höhe h, also die senkrechte Ausdehnung der Schluchtwand.

Lösungsplan: Im Dreieck ABD werden der Reihe nach der Winkel γ, die Seite x und die Seite y berechnet. Da die Fläche ABD und die Seite DE senkrecht zueinander stehen, kann dann mit Hilfe des Tangens die Höhe h auf 2 Wegen berechnet werden. Der Mittelwert der gefundenen Werte liefert das Ergebnis.

$\varphi=180°-\alpha-\beta=180°-120°-40°=20°$

$\frac{x}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\varphi} \rightarrow x=\frac{\sin\beta}{\sin\varphi}\cdot a=\frac{\sin 40°}{\sin 20°}\cdot 5\,km=9{,}4\,km$

$\frac{y}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin\varphi} \rightarrow x=\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\cdot a=\frac{\sin 120°}{\sin 20°}\cdot 5\,km=12{,}7\,km$

$\tan\gamma = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \tan\gamma = 9{,}4\,km \cdot \tan 7{,}3° = 1{,}204\,km$

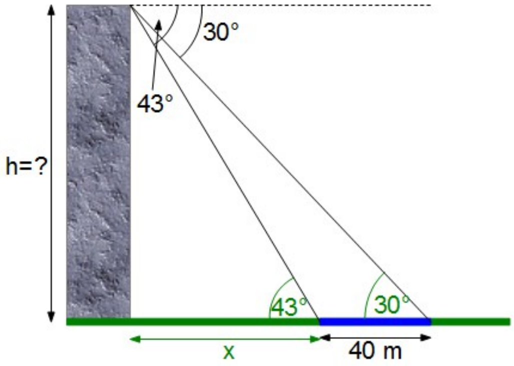
$\tan\delta = \frac{h}{y} \rightarrow h = y \cdot \tan\delta = 12{,}7\,km \cdot \tan 5{,}4° = 1{,}197\,km$

Mittelwert: $h = \frac{1{,}204 + 1{,}197}{2}\,km = 1{,}200\,km$ *Die Höhe der Wand beträgt also etwa 1,2 km.*

---

6 Von der Zinne eines Turmes aus peilt man die beiden Ufer eines 40m breiten Flusses an und erhält die Tiefenwinkel 30° und 43°.

Berechne die Höhe des Turms.



Die Hilfs-Strecke zwischen Turm und Flussufer sei x. An den Flussufern kann man die Wechselwinkel der Tiefenwinkel eintragen. Aus den sich nun ergebenden Tangens-Beziehungen lässt sich h berechnen:

$\tan 43° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 43°}$; $\tan 30° = \frac{h}{x+40} \rightarrow x + 40 = \frac{h}{\tan 30°} \xrightarrow{\text{x einsetzen}}$

$\frac{h}{\tan 43°} + 40 = \frac{h}{\tan 30°} \rightarrow 40 = \frac{h}{\tan 30°} - \frac{h}{\tan 43°} = h \cdot \left(\frac{1}{\tan 30°} - \frac{1}{\tan 43°}\right) \rightarrow$

$h = \frac{40}{\frac{1}{\tan 30°} - \frac{1}{\tan 43°}} \approx 60{,}6$

Der Turm hat also eine Höhe von etwas mehr als 60 m.

---

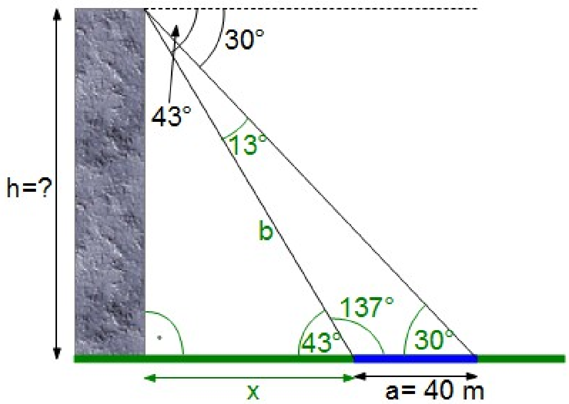
alternativer Lösungsweg (von Schülern bevorzugt):

Im Dreieck, das die Seite a enthält, werden die Winkel ermittelt. Dann kann man mit dem Sinussatz die Strecke b berechnen und dann mit $\sin 43°$ *die Höhe h.*

$\frac{b}{\sin 30°} = \frac{a}{\sin 13°} \rightarrow b = \frac{\sin 30°}{\sin 13°} \cdot a = \frac{\sin 30°}{\sin 13°} \cdot 40 \approx 88{,}9$

$\sin 43° = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \cdot \sin 43° = \frac{\sin 30°}{\sin 13°} \cdot 40 \cdot \sin 43° \approx 60{,}6$

Auch hier ergibt sich die Turmhöhe zu etwa 60m.



Achtung: Die Zeichnungen in den Aufgaben 2, 4, 5 und 6 sind nicht maßstabsgerecht!

VIEL ERFOLG BEI DER BEARBEITUNG DER AUFGABEN!