



Lösung

- 1 Im Haushalt benutzt man zur Angabe des Energieverbrauchs die Einheit kWh (Kilowattstunde). Dabei ist $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$ (1 Kilowatt gleich 1000 Watt). Bei Großverbrauchern werden die Einheiten Megawatt (MW) und Gigawatt (GW) gebraucht, wobei $1 \text{ MW} = 1000 \text{ kW}$ und $1 \text{ GW} = 1000 \text{ MW}$.

Bei Speichermedien (Festplatte, USB-Stick usw.) benutzt man auch die Buchstaben k, M und G, aber hier ist der Faktor zwischen den Einheiten nicht 1000, sondern 1024.

Berechne, wieviel Byte in einem Gigabyte (GB) sind.

$$1 \text{ GB} = 1024 \text{ MB} = 1024 \cdot 1024 \text{ kB} = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \text{ Byte} = 1024^3 \text{ Byte} = 1073741824 \text{ Byte}$$

- 2 Löse die Klammern auf, vereinfache so weit wie möglich und schreibe alle Ergebnisse so, dass in den Exponenten keine Brüche und keine negativen Zahlen vorkommen.

$$\text{a) } (5a^2 - 6a^3) \cdot 4a^{-3} = 5a^2 \cdot 4a^{-3} - 6a^3 \cdot 4a^{-3} = 20a^{-1} - 24a^0 = \frac{20}{a} - 24 \cdot 1 = \frac{20}{a} - 24$$

$$\text{b) } \left(x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{4}{3}} = x^{\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} \cdot y^{-\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = x^{-1} \cdot y^{\frac{20}{18}} = x^{-1} \cdot y^{\frac{10}{9}} = x^{-1} \cdot \sqrt[9]{y^{10}} = \frac{\sqrt[9]{y^{10}}}{x}$$

$$\text{c) } \sqrt[5]{x^4}^8 = \left(x^{\frac{4}{5}}\right)^8 = x^{\frac{4}{5} \cdot 8} = x^{\frac{32}{5}} = \sqrt[5]{x^{32}}$$

$$\text{d) } \frac{(a^2 \cdot b^2)^{-2}}{(a \cdot b)^{-2}} = \left(\frac{a^2 \cdot b^2}{a \cdot b}\right)^{-2} = (a \cdot b)^{-2} = \frac{1}{(a \cdot b)^2} = \frac{1}{a^2 \cdot b^2}$$

$$\text{e) } \left(\sqrt[3]{2} : 3^{\frac{1}{2}}\right)^6 = \left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^6 = \frac{2^{\frac{6}{3}}}{3^{\frac{6}{2}}} = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$$

$$\text{f) } (2x^{-1} + y^{-1}) \cdot (3x^{-4} - 2y^{-5}) = 2x^{-1} \cdot 3x^{-4} - 2x^{-1} \cdot 2y^{-5} + y^{-1} \cdot 3x^{-4} - y^{-1} \cdot 2y^{-5} = 6x^{-5} - 4x^{-1}y^{-5} + 3x^{-4}y^{-1} - 2y^{-6} = \frac{6}{x^5} - \frac{4}{xy^5} + \frac{3}{x^4y} - \frac{2}{y^6}$$

- 3 Bestimme durch Rechnung die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

$$\text{a) } x^6 = 2^{12} \rightarrow x = \pm \sqrt[6]{2^{12}} = \pm 2^{\frac{12}{6}} = \pm 2^2 = \pm 4 \rightarrow \mathbb{L} = \{\pm 4\}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{x} = -27 \rightarrow x = (-27)^3 = -19683 \rightarrow \mathbb{L} = \{-19683\}$$

$$\text{c) } 2 \cdot (x+4)^5 = 64 \rightarrow (x+4)^5 = 32 \rightarrow x+4 = \sqrt[5]{32} = 2 \rightarrow x = 2 - 4 = -2 \rightarrow \mathbb{L} = \{-2\}$$

d) $x^4 + 8x^2 - 48 = 0$; $x^2 = z \rightarrow z^2 + 8z - 48 = 0 \rightarrow z_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 + 48} = -4 \pm \sqrt{64} = -4 \pm 8$
 $z_1 = -4 + 8 = 4 = x^2 \rightarrow x_{1,2} = \pm 2$; $z_2 = -12 = x^2$ keine Lösung $\rightarrow \mathbb{L} = \{-2; +2\}$

e) $\sqrt[4]{x-5} = 3 \rightarrow x-5 = 3^4 = 81 \rightarrow x = 81 + 5 = 86 \rightarrow \mathbb{L} = \{86\}$

- 4 Facebook hatte im Jahr 2006 etwa 6 Millionen Teilnehmer. Im Jahr 2010 waren es dann 500 Millionen. Die Teilnehmerzahlen stiegen jedes Jahr um denselben Faktor. Berechne, um das Wievielfache jedes Jahr die Teilnehmerzahl anwuchs.

In jedem Jahr steigt die Teilnehmerzahl um den Faktor x.

Nach 1 Jahr sind es $6 \cdot x$ Millionen Teilnehmer.

Nach 2 Jahr sind es $6 \cdot x \cdot x = 6 \cdot x^2$ Millionen Teilnehmer.

Nach 3 Jahr sind es $6 \cdot x \cdot x \cdot x = 6 \cdot x^3$ Millionen Teilnehmer.

Nach 4 Jahr sind es $6 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 6 \cdot x^4$ Millionen Teilnehmer.

Damit muss folgende Gleichung richtig sein: $6 \cdot x^4 = 500$.

Lösung dieser Gleichung: $6 \cdot x^4 = 500 \rightarrow x^4 = \frac{500}{6} = \frac{250}{3} \rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{250}{3}} \approx 3$

Die Teilnehmerzahl ist in jedem Jahr etwa um das 3-fache gestiegen.

- 5 a) Untersuche, nach welcher Rechenregel die Zahlenreihe $2^8, 2^4, 2^2, 2^1, 2^{\frac{1}{2}}$ gebildet wird.

$2^4 = 16 = \sqrt{2^8} = \sqrt{256}$; $2^2 = 4 = \sqrt{2^4} = \sqrt{16}$; $2^1 = 2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{4}$; $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = \sqrt{2^1} = \sqrt{2}$

Bei den Werten kommt man von links nach rechts, indem man jeweils die Quadratwurzel zieht oder indem man den Exponenten halbiert.

b) Zeige mit Hilfe der Zahlenfolge unter a), warum folgende Beziehung gilt: $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$.

Die nächste Zahl in der Zahlenfolge ergibt sich, indem man den Exponenten halbiert: $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$.

Man kann aber auch aus der letzten Zahl die Wurzel ziehen: $\sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Also gilt $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!