Lösung

1 In einer Lotto-Urne befinden sich 49 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 49 beschriftet sind. Eine einzige Kugel wird gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel eine der Zahlen 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 trägt.

Es liegt ein Laplace-Versuch vor, da für jede Zahl die Wahrscheinlichkeit p fürs Ziehen gleich ist.

Da 7 Zahlen von 49 einen Erfolg bedeuten, ist $p=\frac{7}{49}=\frac{1}{7}$.

---

2 Geben Sie Beispiele für jeweils einen Zufallsversuch an, bei dem es sinnvoll ist

a) den Zentralwert statt des arithmetischen Mittelwerts,

Wenn fast alle Zahlen aus einem eng begrenzten Zahlbereich stammen und wenige sehr viel größere oder kleinere Zahlen existieren, ist es sinnvoll, die „Ausreißer“ nicht zu berücksichtigen.
Beispiel: Das Alter der Menschen in einem Klassenraum wird erfragt. Wird der (über 60 Jahre alte) Lehrer mit in die Befragung einbezogen, so würde der arithmetische Mittelwert einen Wert ergeben, der über dem Alter der meisten Schüler liegt.
Beispiel: 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 61: Zentralwert ist 17 und arithmetischer Mittelwert ist 19,2.

b) den arithmetischen Mittelwert statt des Zentralwerts

Häufen sich die Zufallswerte bei Werten sehr unterschiedlicher Größe, kann der Zentralwert einen verzerrten Eindruck des Ergebnisses erwecken.
Beispiel: Man würfelt und erhält für jede 6 eine Auszahlung von 12 €. Hat man keine 6 gewürfelt, erhält man nichts (also 0 €): 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 12, 12, 12.
Aus dem Zahlenbeispiel folgt: arithmetischer Mittelwert ist 2, Zentralwert ist 0.

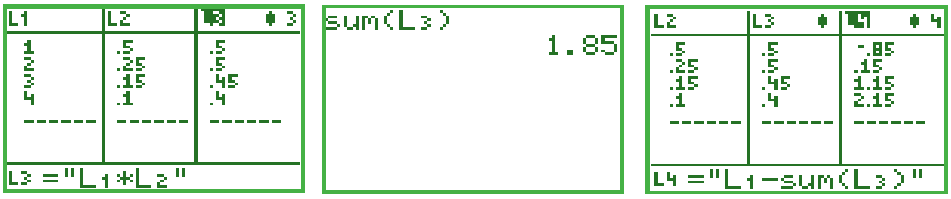
anzugeben.

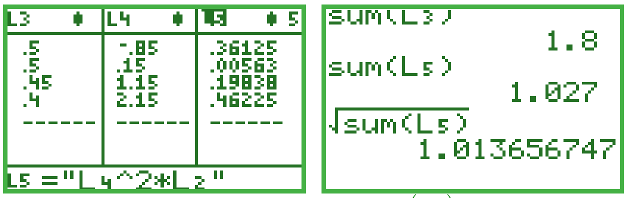
---

3 In einem Gefäß befinden sich 10 rote, 5 gelbe, 3 grüne und 2 blaue Kugeln einheitlicher Größe und einheitlichen Materials.
Es wird 1 Kugel gezogen.
Je nach Farbe erhält man einen Preis: 1 € für rot, 2 € für gelb, 3 € für grün und 4 € für blau.

Geben Sie an (Stichpunkte), welche Schritte der Reihe nach notwendig sind, um den Erwartungswert und die Standardabweichung mit Bleistift und Papier, also ohne Taschenrechner oder Computer, zu berechnen.
Führen Sie dann diese Rechnungen mit Hilfe der Listenansicht des GTR durch und protokollieren Sie die Werte (Zwischenergebnisse und E(X) und σ(X)).

Die Preise (in €) werden mit den Wahrscheinlichkeiten (Anzahl der Kugeln einer Farbe dividiert durch die Anzahl aller Kugeln) für die Kugeln der entsprechenden Farbe multipliziert. Diese Ergebnisse addiert ergeben den Erwartungswert.
Die Differenzen der Preise vom Erwartungswert werden quadriert und mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten multipliziert. Diese Ergebnisse addiert ergeben die Varianz. Die Wurzel aus der Varianz ergibt die Standardabweichung.
Entsprechende Rechnung mit dem Taschenrechner auf der nächsten Seite:





Der Erwartungswert ist also $E(X)=1{,}85$ *, die Varianz hat den Wert* $V(X)=1{,}027$ *und die Standardabweichung ist damit* $\sigma(X)\approx 1{,}014$ *.*

---

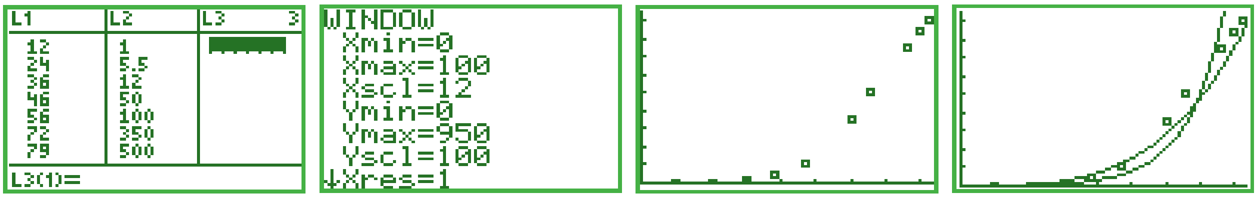
4 Facebook hat folgende Teilnehmerzahlen veröffentlicht:

Datum		Nutzer in Millionen
Dezember 2004	12	1
Dezember 2005	24	5,5
Dezember 2006	36	12
Oktober 2007	46	50
August 2008	56	100
Dezember 2009	72	350
Juli 2010	79	500
Juli 2011	91	750
Dezember 2011	96	845
März 2012	99	901

a) Die mittlere Spalte wurde zu Ihrer Erleichterung hinzugefügt. Erklären Sie die Bedeutung der Zahlen in dieser Spalte.

Da die Daten nicht immer im selben Monat erhoben wurden, liegen zwischen den Daten der Messwerte unterschiedlich lange Zeiträume. Die 2. Spalte gibt die Zeit in Monaten von Beginn 2004 an und ermöglicht so eine korrekte graphische Darstellung und Auswertung.

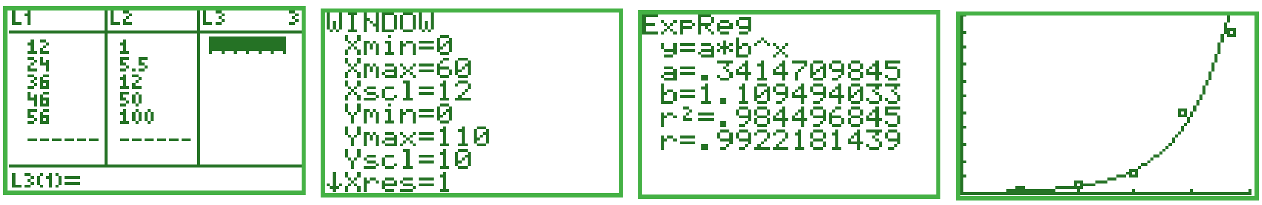
b) Stellen Sie die Daten der 2. und 3. Spalte graphisch dar und finden Sie mit Hilfe einer Regression eine Funktionsgleichung zur Beschreibung der Daten.



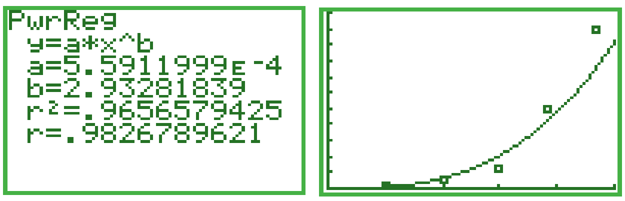
Bei der Regression liefert sowohl ExpReg (Exponentialfunktion - im mittleren Bereich die untere Kurve) als auch PwrReg (Potenzfunktion) keine brauchbaren Ergebnisse.

Falls es keine eindeutige Lösung gibt, teilen Sie den Datenbereich in 2 Teile und führen Sie die Regression für jeden Teil gesondert durch.

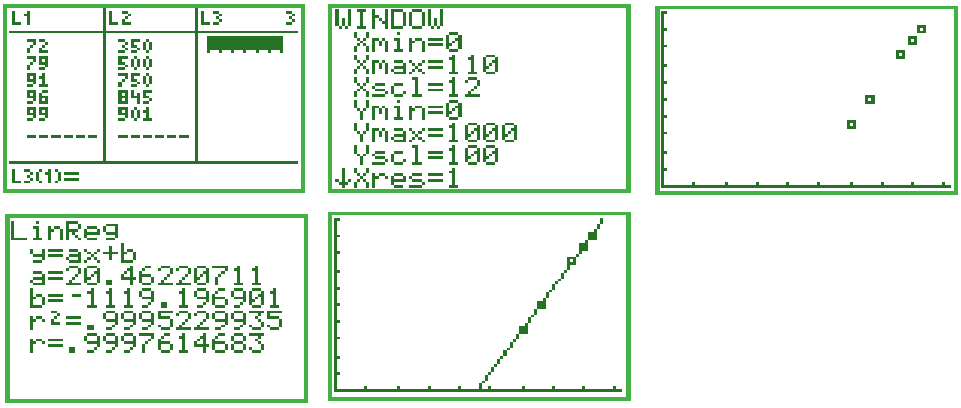
Die ersten 5 Werte werden zunächst untersucht (dort liegt eine gekrümmte Kurve vor, bei den nächsten 5 Werten scheint eine lineare Funktion vorzuliegen).



Auf Grund des Korrelationskoeffizienten und des Kurvenverlaufs scheint die Exponentialfunktion $y=0{,}34\cdot 1{,}11^x$ *das Ansteigen der Teilnehmerzahlen in den ersten Jahren am besten darzustellen.*



Lineare Regression bei mit letzten 5 Werten:



Es ergibt sich die Gerade mit der Gleichung $y=20{,}5\cdot x-1120{,}2$ *.*

c) Geben Sie eine begründete Prognose über die weitere Entwicklung der Nutzerzahlen. Berücksichtigen Sie dazu nur die gegebene Tabelle und keine aktuellen Erkenntnisse.

Da das Anwachsen der Nutzerzahlen zunächst durch eine Exponentialfunktion und dann durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann, hat sich die Wachstumsgeschwindigkeit verringert. Würde sich die Wachstumsgeschwindigkeit weiter verringern, würde die Ausgleichskurve als Rechtskurve weiter geführt werden. Möglich wäre also ein sich anschließendes begrenztes Wachstum, so dass insgesamt ein logistisches Wachstum vorliegen würde.

---

5 Alle 1174 Schüler/innen der GFS erhielten eine Einladung zum Schulfest. Leider wurden die beschrifteten Umschläge und die personalisierten Einladungsschreiben (Serienbrief) per Zufall einander zugeordnet.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau ein(e) einzige(r) Schüler(in) einen Brief erhalten hat, in dem die Adresse und die Anrede übereinstimmten.

Lösung 1 mit Binomialverteilung:
Versuch: Schüler/in vergleicht Anschrift und Anrede. Es gibt die beiden Ergebnisse Erfolg=Übereinstimmung und Misserfolg=keine Übereinstimmung. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Erfolge an. Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg ist immer $p=\frac{1}{1174}$ *.*

Gesucht ist $B_{1174;\frac{1}{1174}}(X=1)=\binom{1174}{1}\cdot\left(\frac{1}{1174}\right)^1\cdot\left(\frac{1173}{1174}\right)^{1173}\approx 0{,}368$ *.*

Berechnung mit dem Taschenrechner auch mit der Funktion binompdf(1174,1/1174,1) *möglich.*

Lösung 2 mit dem 1/e-Gesetz:
Ist n gleich 1/p bzw. p gleich 1/n, so ergibt sich für größere n näherungsweise

$$B_{n;\frac{1}{n}}(X=0)=B_{n;\frac{1}{n}}(X=1)=\frac{1}{e}=0{,}367879...$$

---

6 Zeigen Sie mit Hilfe einer allgemeinen Rechnung (also mit Buchstaben), dass folgende Beziehung zwischen 2 Binomen gültig ist: $\binom{a}{b}=\binom{a}{a-b}$.

Es gilt $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ *. Daraus folgt* $\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!\cdot(a-b)!}$ *und*

$\binom{a}{a-b}=\frac{a!}{(a-b)!\cdot(a-(a-b))!}=\frac{a!}{(a-b)!\cdot(a-a+b)!}=\frac{a!}{(a-b)!\cdot b!}=\frac{a!}{b!\cdot(a-b)!}=\binom{a}{b}$ *, q. e. d.*

---

7 Bei einem Gewinnspiel darf man für 1,50 € Einsatz teilnehmen.
Es wird mit einem (echten) W6-Würfel maximal 4-mal gewürfelt.
Würfelt man beim 1. Wurf eine 6, so erhält man 4 € und das Spiel ist beendet.
Würfelt man beim 2. Wurf eine 6, so erhält man 3 € und das Spiel ist beendet.
Würfelt man beim 3. Wurf eine 6, so erhält man 2 € und das Spiel ist beendet.
Würfelt man beim 4. Wurf eine 6, so erhält man 1 € und das Spiel ist beendet.

Berechnen Sie den Erwartungswert (Gewinn pro Spiel) und beantworten Sie die Frage, ob das Spiel fair ist oder wer (der Spielende oder der Spielanbieter) einen Vorteil hat.

Würfelt man zum ersten Mal eine 6 im n-ten Wurf, so hat man vorher (n-1)-mal keine 6 geworfen.

Die Wahrscheinlichkeit ist dann $p(n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}$ *.*

Für die oben dargestellten Fälle ergeben sich deshalb folgende Wahrscheinlichkeiten:

$p(1)=\left(\frac{5}{6}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}=\frac{1}{6}$; $p(2)=\left(\frac{5}{6}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}=\frac{5}{6^2}$; $p(3)=\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}=\frac{5^2}{6^3}$; $p(4)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{1}=\frac{5^3}{6^4}$

Für den Erwartungswert gilt deshalb (Summe über alle Produkte k·P(X=k); k sind Gewinne in €):

$E(X)=4\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{5}{6^2}+2\cdot\frac{5^2}{6^3}+1\cdot\frac{5^3}{6^4}\approx 1{,}41$ *Man gewinnt also etwa 1,41 € pro Spiel.*

Da der Einsatz 1,50 € pro Spiel beträgt, gewinnt der Spieleanbieter etwa 9 Cent pro Spiel.
Das Spiel ist also nicht fair und der Spieleanbieter hat einen Vorteil.

---

8 Ein großer Zoo hat am Eingang 3 Eingangs-Drehkreuze eingerichtet. Jede Person benötigt im Schnitt 5 Sekunden, um durch das Drehkreuz zu gelangen.
In der Hauptbesuchszeit gehen 2000 Personen pro Stunde in den Zoo hinein.

a) Berechnen Sie, wie viele Drehkreuze während der Hauptbesuchszeit im Schnitt zur selben Zeit benötigt werden (nicht runden, sondern Dezimalzahl angeben).

Als Beobachtungs-Zeitraum wird 1 Stunde gewählt. In dieser Zeit durchqueren n=2000 Personen die Drehkreuze. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast an einem Drehkreuz angetroffen wird, beträgt p=5/3600=1/720 (1 Stunde hat 3600 Sekunden).
Wir rechnen mit der Binomialverteilung, weil es nur 2 Ergebnisse gibt (Drehkreuz wird vom Gast benutzt, Drehkreuz wird vom Gast nicht benutzt) und weil sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gast das Drehkreuz benutzt,nicht ändert.

Für den Erwartungswert gilt also $E(X)=n\cdot p=2000\cdot\frac{5}{3600}\approx 2{,}78$ *.*

Man sollte also annehmen, dass 3 Drehkreuze reichen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man während der Hauptbesuchszeit an den Drehkreuzen warten muss.

Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 3 Drehkreuze benötigt werden:

$B_{2000;\frac{5}{3600}}(X>3)=1-B_{2000;\frac{5}{3600}}(X\leq 3)\approx 1-0{,}697=0{,}303$

In etwa 30% der Zeit werden mehr als 3 Drehkreuze benötigt.

Zusatz: Wie wäre die Situation bei 4 Drehkreuzen? $B_{2000;\frac{5}{3600}}(X>4)=1-B_{2000;\frac{5}{3600}}(X\leq 4)\approx 1-0{,}851=0{,}149$

9

Ein Lehrer erstellt einen Ankreuztest mit 10 Aufgaben. Wer weniger als 5 Aufgaben richtig beantwortet, besteht den Test nicht.

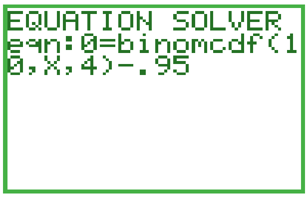
Berechnen Sie, wie viel Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe zur Auswahl gestellt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, den Test nur durch Raten zu bestehen, kleiner als 5% ist.

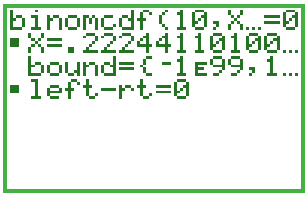
Es liegt ein Bernoulli-Versuch vor, da es bei einer Antwort 2 Möglichkeiten gibt (richtig und falsch) und die Wahrscheinlichkeit bei jeder Aufgabe für die richtige Lösung durch Raten gleich ist. n=10 ist gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, 5 oder mehr Aufgaben richtig zu beantworten, soll kleiner als 5% sein. Als Formel: $B_{10,p}(X\geq 5)<5\%=0{,}05$ *oder* $B_{10,p}(X\leq 4)>100\%-5\%=0{,}95$ *.*
Zur Lösung werden im Taschenrechner die Werte für $B_{10,p}(X\leq 4)$ *berechnet, indem man für p die für die Anzahl der Lösungsvorschläge entsprechende Wahrscheinlichkeit einsetzt:*
2 Lösungen: p=1/2; 3 Lösungen: p=1/3; 4 Lösungen: p=1/4; 5 Lösungen: p=1/5 usw.
Man schaut dabei nach, wann die Wahrscheinlichkeit größer als 0,95 wird.

$B_{10,\frac{1}{2}}(X\leq 4)\approx 0{,}377$; $B_{10,\frac{1}{3}}(X\leq 4)\approx 0{,}787$; $B_{10,\frac{1}{4}}(X\leq 4)\approx 0{,}922$; $B_{10,\frac{1}{5}}(X\leq 4)\approx 0{,}967$

Daraus folgt, dass bei 5 Antwortmöglichkeiten die Wahrscheinlichkeit, mehr als 4 Aufgaben richtig geraten zu haben, kleiner als 5% ist.

Alternativ hätte man mit dem Solver berechnen können, bei welcher Wahrscheinlichkeit p sich genau 5% ergeben würde:





p=0,22244110100 gehört zu 1/p=4,49557... Fragen, d. h. ab 5 Fragen ist die Grenze von 5% überschritten.

Formeln: $h=\frac{H}{n}$ $\quad \bar{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ $\quad E(X)=\sum_i k_i\cdot p(X=k_i)$ $\quad 0!=1$; $1!=1$; $1\cdot 2\cdot ...\cdot n=n!$

$\sigma(X)=\sqrt{\sum_i (k_i-E(X))^2\cdot p(X=k_i)}$ $\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ $\quad B_{n;p}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{(n-k)}$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!