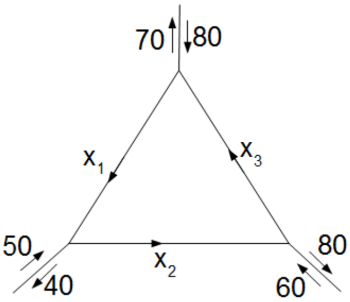
Lösung

Bei allen Aufgaben gilt:
Rechnungen mit dem Taschenrechner müssen so protokolliert werden, dass der Rechengang eindeutig nachvollzogen werden kann und Zwischenergebnisse zu überprüfen sind.

---

1 An einem Kreisel mit 3 Ausfahrten wird eine Verkehrszählung durchgeführt. Die Werte geben an, wieviel Fahrzeuge pro Zeiteinheit in den Kreisel hinein- und herausgefahren sind.



a) Berechnen Sie die Anzahl der Fahrzeuge pro Zeiteinheit auf den Abschnitten x_1, x_2 und x_3 des Kreisels.

Mit Hilfe der Anzahl der an- und abfahrenden Fahrzeuge wird für jeden der 3 Knoten eine Gleichung aufgestellt:

Knoten oben Mitte: $80+x_3=70+x_1$

Knoten unten links: $50+x_1=40+x_2$

Knoten unten rechts: $60+x_2=80+x_3$

Erstellen eines Gleichungssystems aus den 3 Gleichungen und Lösung mit GTR:

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & & +x_3 & = & -10 \\ +x_1 & -x_2 & & = & -10 \\ & +x_2 & -x_3 & = & 20 \end{array}$$

Nach der Umformung bleiben nur 2 Gleichungen übrig, d.h. es existieren unendlich viele Lösungen. Wählt man für x_3 den Parameter r, so ergibt sich

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -r & = & 10 \\ x_2 & -r & = & 20 \end{array} \rightarrow x_1=10+r \;;\; x_2=20+r \;;\; x_3=r$$ *Zum Wertebereich für r siehe b)*

b) In der Nähe des Kreisels soll ein Volksfest gefeiert werden. Entscheiden Sie (mit Begründung), ob eine der Teilstrecken problemlos gesperrt werden könnte, ohne den Verkehrsfluss zu beeinträchtigen. Beachten Sie dabei, dass ein Wenden auf den Zufahrtsstraßen und direkt am Kreisel nicht erlaubt ist.

r muss größer oder gleich 0 sein (also $r\geq 0$), da es auf der Strecke x_3 nicht negativ viele Fahrzeuge geben kann. Kann aber der Bereich x_3 ohne Autos sein? Da 60 Autos auf den Knoten unten rechts zufahren und man auf x_2 nicht nach links fahren darf, müssen mindestens 60 Autos auf x_3 pro Zeiteinheit gemessen werden. Also gilt $r\geq 60$. Nach oben hin ist r nur durch die Aufnahmekapazität der Straßen begrenzt.
x1 und x2 können nicht autofrei sein, da unabhängig von r mindestens 10 bzw. 20 Autos dort pro Zeiteinheit fahren. Folglich kann man keinen Straßenabschnitt problemlos sperren.

c) Berechnen Sie die Mindestanzahl der Fahrzeuge, die sich ständig pro Zeiteinheit im Kreisel aufhält.

Wie unter b) schon gezeigt, müssen auf x_3 mindestens 60 Autos pro Zeiteinheit fahren. Da aber beim oberen Knoten 70 Autos abfahren, müssen diese vorher auf x_3 gefahren sein. Angenommen,

es waren tatsächlich auf x_3 70 Autos gemessen worden, dann würden auf x_1 die oben neu hinzukommenden 80 Autos fahren. Von diesen fahren 40 unten links ab, d.h. es bleiben noch 40 Autos im Kreisel. Neu hinzu kommen unten links 50 Autos, so dass auf x_2 90 Autos gemessen werden. Davon fahren unten rechts 80 Wagen ab. Es bleiben also 10 Fahrzeuge übrig, die mit den hinzukommenden 60 Fahrzeugen 70 Autos ergeben, die auf x_3 fahren, wie schon oben angegeben. Die mindestens gemessenen Werte sind also $x_1 = 80$; $x_2 = 90$; $x_3 = 70$.
Es sind also ständig mindestens 80+90+70=240 Autos pro Zeiteinheit im Kreisverkehr.

---

2 Berechnen Sie mit dem Gaußverfahren (ohne Taschenrechnerbenutzung) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2a & - & 4b & + & 8c & = & -34 & [1] \\ a & - & 4b & - & 6c & = & 17 & [2] \\ -a & + & b & - & 3c & = & 10 & [3] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} a & - & 2b & + & 4c & = & -17 & 0{,}5\cdot[1]=[4] \\ 0 & + & 2b & + & 10c & = & -34 & 0{,}5\cdot[1]-[2]=[5] \\ 0 & - & b & + & c & = & -7 & 0{,}5\cdot[1]+[3]=[6] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} a & - & 2b & + & 4c & = & -17 & [4] \\ 0 & + & b & + & 5c & = & -17 & 0{,}5\cdot[5]=[7] \\ 0 & + & 0 & + & 6c & = & -24 & 0{,}5\cdot[5]+[6]=[8] \end{array}$$

Aus [8] folgt $6c=-24 \rightarrow c=\frac{-24}{6}=-4$

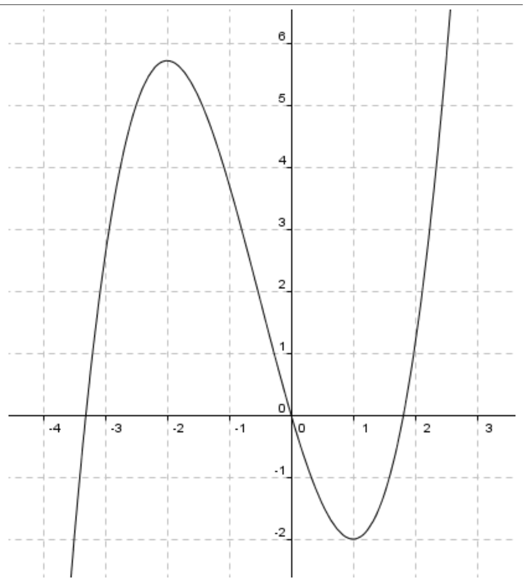
Aus [7] folgt $b+5c=-17 \rightarrow b-20=-17 \rightarrow b=-17+20=3$

Aus [4] folgt $a-2b+4c=-17 \rightarrow a-6-16=-17 \rightarrow a=-17+6+16=5$

Es ergeben sich also die Werte $a=5$; $b=3$; $c=-4$.

---

3 Berechnen Sie die Funktionsgleichung zum abgebildeten Graphen, indem Sie mit Hilfe besonderer Eigenschaften der Kurve ein Gleichungssystem aufstellen und dieses lösen. Der Grad der gesuchten ganzrationalen Funktion soll möglichst klein sein.



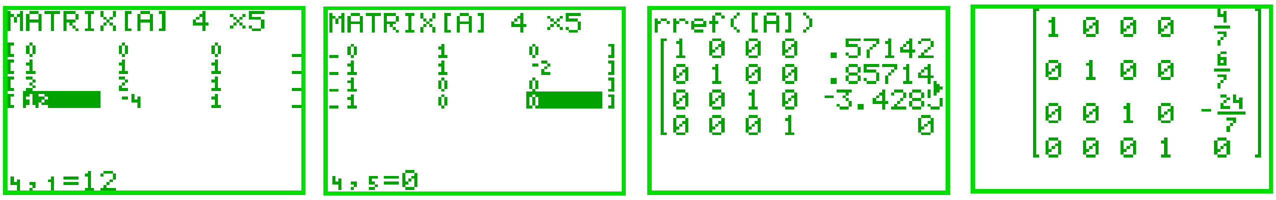
Da nur 2 Extrema zu sehen sind, wird der Ansatz mit einer Gleichung 3. Grades versucht:

$f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \rightarrow f'(x)=3\cdot a\cdot x^2+2\cdot b\cdot x+c$

Da 4 Werte gesucht sind, müssen 4 Gleichungen aufgestellt werden und dazu 4 Bedingungen gesucht werden:
$f(0)=0$; $f(1)=-2$; $f'(1)=0$; $f'(-2)=0$

Es folgt das Gleichungssystem $\begin{array}{c} f(0)=d=0 \\ f(1)=a+b+c+d=-2 \\ f'(1)=3a+2b+c=0 \\ f'(-2)=12a-4b+c=0 \end{array}$ *und die Matrix* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mit dem Taschenrechner ergibt sich folgender Lösungsweg:

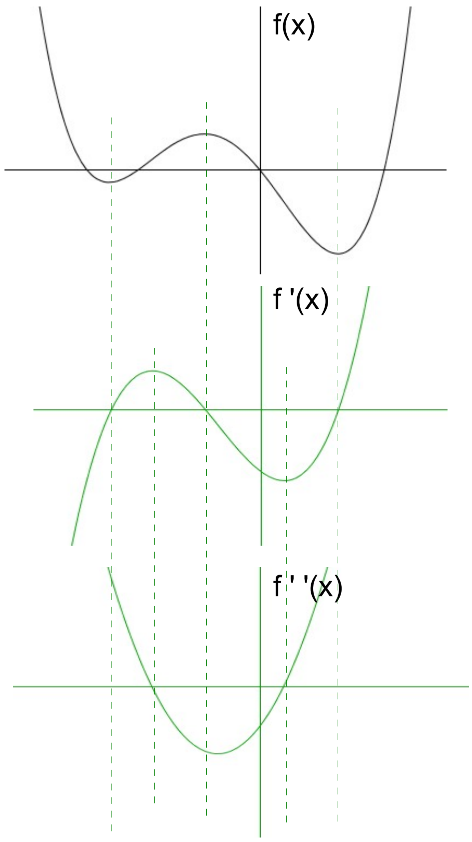


Daraus folgen die Werte $a=\frac{4}{7}$; $b=\frac{6}{7}$; $c=-\frac{24}{7}$; $d=0$

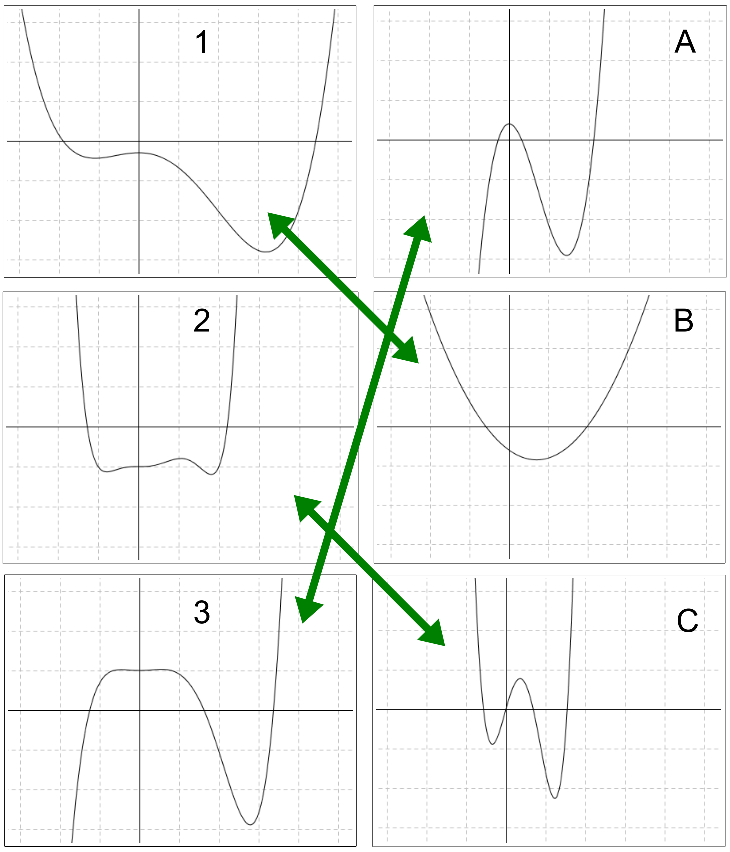
und damit die Funktionsgleichung $f(x)=\frac{4}{7}\cdot x^3+\frac{6}{7}\cdot x^2-\frac{24}{7}\cdot x$.

---

4 Bilden Sie graphisch die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Kurve.



5 Zu den Funktionsgraphen links sind rechts die Graphen der 2. Ableitungen gegeben. Ordnen Sie die Graphen einander zu.



---

6 Gesucht ist eine Funktionsgleichung vom Typ $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$, deren Graph einen Wendepunkt bei (1/30) und eine Nullstelle bei x=-1 besitzt.

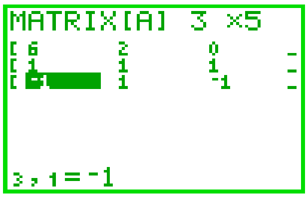
a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass unendlich viele Funktionen diese Bedingungen erfüllen.

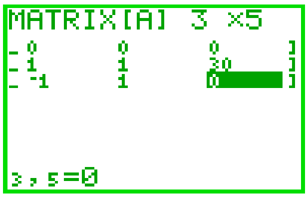
Es sind eine Wendestelle, die Koordinaten eines Punktes und eine Nullstelle gegeben.
Zur Berechnung der 4 Werte a, b, c und d stehen also nur 3 Gleichungen zur Verfügung.
Das Gleichungssystem ist damit unterbestimmt und es könnten damit unendlich viele Lösungen existieren.

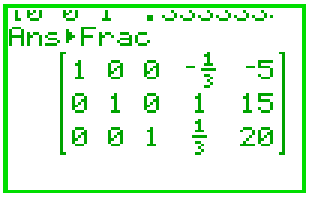
Ableitungen: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=6ax+2b$

Bedingungen: $f''(1)=0$, $f(1)=30$, $f(-1)=0$ *Gleichungssystem:* $\begin{matrix} 6a+2b=0 \\ a+b+c+d=30 \\ -a+b-c+d=0 \end{matrix}$ *Matrix:* $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Taschenrechner:







Wählt man d=3·r, so ergibt sich $a=-5+r$; $b=15-3r$; $c=20-r$; $d=3r$ *mit* $r\in\mathbb{R}$ *.*

b) Berechnen Sie, welche Bedingung der konstante Summand d in der Funktionsgleichung erfüllen muss, damit alle Koeffizienten a, b, c und d ganzzahlig sind.

Die Konstanten in den Gleichungen für a, b und c sind alle ganzzahlig. Damit a, b und c bei einer Wahl von r ganzzahlig bleiben, muss auch r ganzzahlig sein. Da $d=3r \rightarrow r=\frac{d}{3}$ *, muss d eine durch 3 teilbare Zahl sein, damit r ganzzahlig ist. d ist also ein ganzzahliges Vielfaches von 3.*

c) Eine der Lösungs-Funktionen besitzt als Graph eine Gerade (wenn auch die Bezeichnung „Wendepunkt“ dann nicht mehr passt). Geben Sie die zugehörige Geradengleichung an.

Für eine Geradengleichung muss gelten $a=b=0$ *. Das ist der Fall, wenn* $r=5$ *.*
Es folgt dann mit $a=-5+r=-5+5=0$; $b=15-3\cdot 5=0$; $c=20-5=15$; $d=3\cdot 5=15$ *die Gleichung* $y=15\cdot x+15$ *.*

---

7 Eine 4-stellige Zahl ist gesucht.

- Liest man die Zahl von rückwärts und subtrahiert dann diese Zahl von der gesuchten Zahl, so ergibt sich 6903.
- Die 1. Ziffer ist um 6 größer als die 2. Ziffer.
- Die Summe aus der 2. und der 4. Ziffer ergibt die 3. Ziffer.
- Das Doppelte der aus den beiden letzten Ziffern gebildeten Zahl, vermehrt um 20, ergibt die aus den beiden ersten Ziffern gebildete Zahl.

Die Zahl sei geschrieben abcd und hat damit den Wert $1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d$ *.*
Rückwärts gelesen heißt die Zahl dcba mit dem Wert $a+10\cdot b+100\cdot c+1000\cdot d$ *.*
Subtrahiert ergibt sich $999\cdot a+90\cdot b-90\cdot c-999\cdot d$ *.*

Die 4 Bedingungen als Gleichungssystem geschrieben:

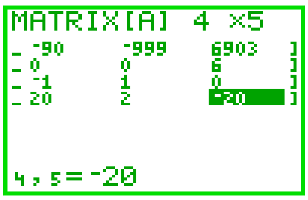
$$\begin{matrix} 999\cdot a+90\cdot b-90\cdot c-999\cdot d=6903 \\ a=b+6 \\ b+d=c \\ 2\cdot(10\cdot c+d)+20=10\cdot a+b \end{matrix}$$

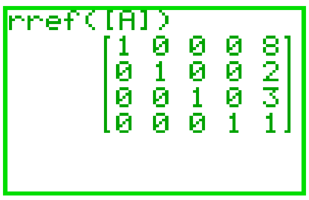
Daraus ergibt sich die Matrix

$$\begin{matrix} 999 & 90 & -90 & -999 & 6903 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -1 & 20 & 2 & -20 \end{matrix}$$

Zur Sicherheit: $2\cdot(10\cdot c+d)+20=10\cdot a+b \rightarrow 20c+2d+20=10a+b \rightarrow -10a-b+20c+2d=-20$

Taschenrechner:





Die gesucht Zahl ist 8231.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!