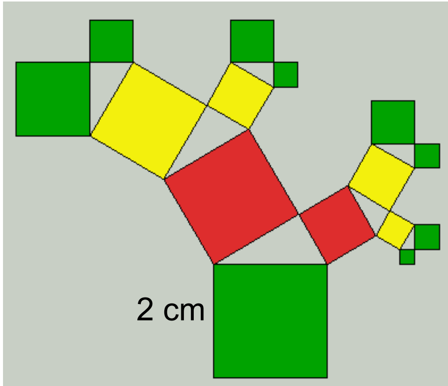
Lösung

1 Die Seitenlänge des unteren großen Quadrats beträgt 2 cm.
Berechne den Flächeninhalt der Gesamtfläche aller in der Zeichnung eingefärbten Quadrate.

Achtung: Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht!

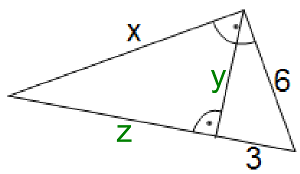


Das große Basisquadrat bildet mit dem darauf gesetzten rechtwinkligen Dreieck und den daran angrenzenden 2 rot eingefärbten Quadraten eine Pythagoras-Figur. Die beiden roten Flächen haben also denselben Flächeninhalt wie das untere Quadrat. Ebenso sind die Flächeninhalte der gelben Quadrate gleich den Flächeinhalten der roten Quadrate. Und schließlich sind die oberen grünen Quadrate inhaltsgleich zu den gelben Quadraten.
Die Gesamtfläche der grünen Quadrate ist also doppelt so groß wie die Fläche des unteren Quadrates: $A_{grün} = 2 \cdot 2\,cm \cdot 2\,cm = 8\,cm^2$

---

2 Berechne die Seitenlänge der Seite x.

Achtung: Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht!



Der Reihe nach werden die Werte für y (Pythagoras), z (Höhensatz) und x (Kathetensatz) berechnet:

$$y^2+3^2=6^2 \rightarrow y^2+9=36 \rightarrow y^2=36-9=27$$

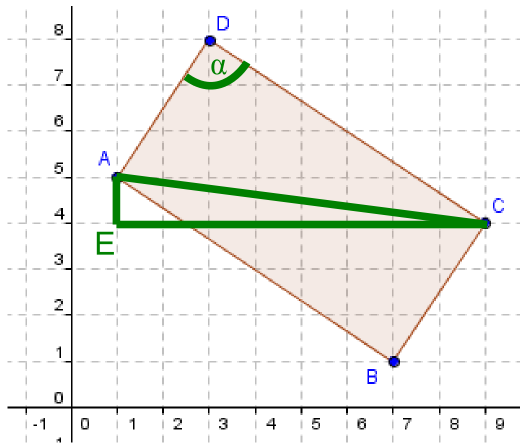
$$y^2=z \cdot 3 \rightarrow z=\frac{y^2}{3}=\frac{27}{3}=9$$

$$x^2=z \cdot (z+3)=9 \cdot (9+3)=9 \cdot 12=108 \rightarrow x=\sqrt{108} \approx 10{,}4$$

---

3 Die Punkte A, B, C und D liegen alle exakt auf den Schnittpunkten des Koordinatengitters und bilden ein Rechteck.

a) Zeige, dass wirklich ein Rechteck vorliegt, indem Du nachweist, dass die gegenüberliegenden Seiten parallel sind und dass <u>ein</u> Winkel ein 90°-Winkel ist.



Koordinaten der 4 Punkte: A(1/5), B(7,1), C(9/4), D(3/8)
Man gelangt von A nach B, indem man 6 Einheiten in positive x-Richtung und 4 Einheiten in negative y-Richtung geht. Ebenso gelangt man von D nach C, indem man 6 Einheiten in positive x-Richtung und 4 Einheiten in negative y-Richtung geht.
Da die Wege parallel laufen und gleiche Länge besitzen, sind auch die beiden Seiten AB und DC parallel und gleich lang.
Von A nach D und von B nach C muss man 2 Einheiten in positive x-Richtung und 3 Einheiten in positive y-Richtung gehen. Auch diese Seiten sind entsprechend parallel und gleich lang.

Berechnung der Seitenlänge AC: Die schräge Strecke AC wird durch Strecken, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzt. Die Längen der senkrechten und waagrechten Strecke kann man aus den Koordinaten der Punkte A und C errechnen. Die Länge von AC berechnet man dann mit dem Satz des Pythagoras:

$\overline{AE}=5-4=1$; $\overline{EC}=9-1=8$ → $\overline{AC}^2=1^2+8^2=1+64=65$ → $\overline{AC}=\sqrt{65}$

Wenn der Satz des Pythagoras angewendet auf das Dreieck ACD gilt, ist α=90°.
Wie die Seitenlänge $\overline{AC}$ *werden auch die Seitenlängen* $\overline{AD}$ *und* $\overline{CD}$ *bestimmt:*

$\overline{AD}=\sqrt{(8-5)^2+(3-1)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$\overline{CD}=\sqrt{(8-4)^2+(9-3)^2}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$

$\overline{AC}^2=65$; $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=13+52=65$ *Da die beiden Werte übereinstimmen, liegt ein rechter Winkel vor und wegen der Parallelität der Viereckseiten sind alle anderen Winkel auch rechte Winkel. Das Viereck ist also ein Rechteck.*

b) Berechne die Seitenlängen und den Flächeninhalt des Rechtecks.

Achtung: Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht!

Die Seitenlängen ergeben sich aus den Rechnungen unter a):

$\overline{AD}=\overline{BC}=\sqrt{13}$; $\overline{CD}=\overline{AB}=\sqrt{52}$

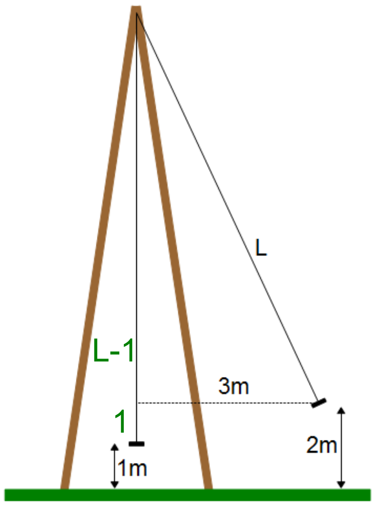
Der Flächeninhalt des Rechtecks berechnet sich aus „Grundseite mal Höhe“:

$A_{Rechteck}=\overline{AD}\cdot\overline{CD}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{4\cdot 13}=\sqrt{2^2\cdot 13^2}=2\cdot 13=26$

---

4 Im Freizeitpark ist eine hohe Schaukel aufgestellt.
In Ruhe befindet sich die Sitzfläche 1 m über dem Erdboden.
Lenkt man die Schaukel 3 m zur Seite aus, so hat die Sitzfläche dort 2 m Abstand zum Erdboden.
Berechne die Länge L der Schaukelaufhängung.

Achtung: Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht!



Aus den Angaben kann man auf die Länge der Teilstücke am senkrecht hängenden Seil schließen. Auf das rechtwinklige Dreieck oben rechts wird der Satz des Pythagoras angewendet:

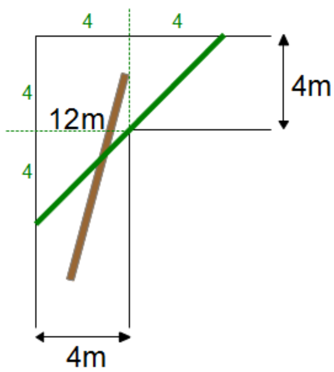
$(L-1)^2+3^2=L^2$ → $L^2-2\cdot L+1+9=L^2$ → $-2\cdot L+10=0$ → $2\cdot L=10$ → $L=5$

Das Schaukelseil hat also die Länge 5 m.

---

5 Über den Flur vor den Mathematikräumen soll ein 12 m langes Brett für ein Pinboard getragen werden.

a) Finde durch Rechnung heraus, ob das Brett waagrecht liegend um die Ecke des Flurs transportiert werden kann. Der Flur soll überall die Breite 4 m besitzen.



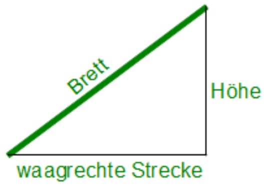
Kritisch ist die in fettem Grün eingezeichnete Lage des Bretts. Mit Hilfe der eingezeichneten Hilfslinien und der Längenangaben kann mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Länge L der fetten grünen Linie bestimmt werden:

$L^2=(4+4)^2+(4+4)^2=8^2+8^2=64+64=128$ → $L=\sqrt{128}\approx 11{,}3$

Da das Brett mit 12 m länger als 11,3 m ist, kann man das Brett nicht waagrecht liegend um die Ecke transportieren.

b) Falls das Brett passen sollte: Wie lang darf das Brett maximal sein?
Falls das Brett nicht passen sollte: Gibt es eine Möglichkeit, das Brett doch um die Ecke zu bringen, ohne es zu beschädigen?

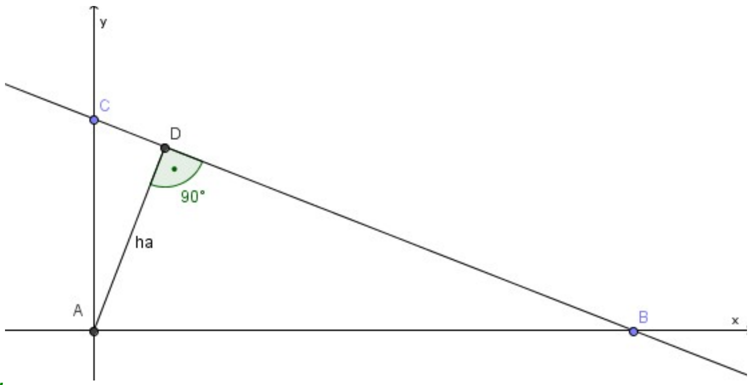
Achtung: Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht!



Würde man das Brett an einer Seite etwas anheben, so würde seine Länge in waagrechter Richtung abnehmen und man könnte es um die Ecke tragen. Nimmt man für die waagrechte Strecke (sicherheitshalber) 11 m an, so berechnet sich mit der Brettlänge 12 m die notwendige Anhebung des einen Brett-Endes zu $Höhe^2 = (12m)^2 - (11m)^2 = 144\,m^2 - 121\,m^2 = 23\,m^2 \rightarrow Höhe = \sqrt{23\,m^2} \approx 4{,}80\,m$.
Bei 11,30 m wären etwa 4 m die notwendige Höhe. Ob der Flur so hoch ist?

---

6 Nebenstehend ist (nicht maßstabsgerecht!) der Graph der Gleichung $y = -\frac{3}{4} \cdot x + 6$ gezeichnet.



a) Begründe, dass der Punkt C die Koordinaten C(0/6) besitzt.

Die additive Konstante in einer Geradengleichung nennt man den y-Achsenabschnitt. Er gibt an, wo die y-Achse geschnitten wird. Hier liegt er bei y=6, also gilt (auf der y-Achse ist x=0): C(0/6)

b) Zeige rechnerisch, dass der Punkt B die Koordinaten B(8/0) besitzt.

Auf der x-Achse gilt y=0. Daraus folgt:

$0 = -\frac{3}{4} \cdot x + 6 \rightarrow \frac{3}{4} \cdot x = 6 \rightarrow x = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8$, *d. h. B(8/0).*

c) Berechne die Länge der Strecke ha.

Plan:
1. Da das Dreieck ABC rechtwinklig ist, kann man die Länge der Strecke BC mit dem Satz des Pythagoras berechnen.
2. Die Fläche des Dreiecks kann man mit Hilfe der Seiten AB und AC berechnen.
3. Die Fläche kann man aber auch mit Hilfe der Seite BC und der Strecke ha berechnen.

1. $\overline{AC} = 6 \;\; ; \overline{AB} = 8 \rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{100} = 10$

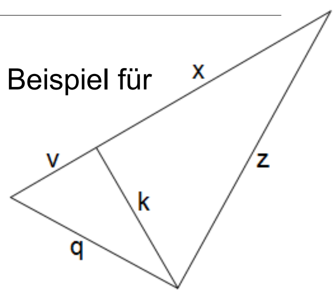
2. $A_{Dreieck\ ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$

3. $A_{Dreieck\ ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot ha = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot ha = 5 \cdot ha \overset{!}{=} 24 \rightarrow ha = \frac{24}{5} = \frac{48}{10} = 4{,}8$

Die Strecke ha hat also die Länge 4,8.

---

7 Gib mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Zeichnung jeweils ein Beispiel für



a) den Satz des Pythagoras, $v^2 + k^2 = q^2 \;;\; k^2 + x^2 = z^2 \;;\; q^2 + z^2 = (v + x)^2$
b) den Höhensatz des Euklid, $k^2 = v \cdot x$
c) den Kathetensatz des Euklid. $z^2 = x \cdot (x + v) \;;\; q^2 = v \cdot (v + x)$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!