2012-03-05 Klassenarbeit 3 Klasse 8e Mathematik

Lösung

1 Schreibe $4,\overline{57}$ als Bruch. Schreibe die Rechenschritte auf, die dich zum Ergebnis führen. Bearbeite diese Aufgabe ohne Taschenrechner.

$$\begin{aligned} x &= 4,\overline{57} \\ 100\cdot x &= 457,\overline{57} \\ 99\cdot x &= 453 \\ x &= \frac{453}{99} \underset{3}{=} \frac{151}{33} \end{aligned}$$

---

2 Ziehe so weit wie möglich teilweise die Wurzel: $\sqrt{72a^4b^2c} =$

$\sqrt{72a^4b^2c} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{c} = 6\cdot\sqrt{2}\cdot a^2\cdot|b|\cdot\sqrt{c} = 6\cdot a^2\cdot|b|\cdot\sqrt{2c}$

---

3 Schreibe alles unter eine Wurzel und vereinfache dann unter der Wurzel so weit wie möglich.

a) $5x\cdot\sqrt{6y} = \sqrt{25\cdot x^2\cdot 6\cdot y} = \sqrt{150\cdot x^2\cdot y}$

b) $a\cdot k\cdot x\cdot\sqrt{\frac{x}{a\cdot k}} = \sqrt{\frac{a^2\cdot k^2\cdot x^2\cdot x}{a\cdot k}} \underset{a\cdot k}{=} \sqrt{a\cdot k\cdot x^3}$

---

4 Bestimme jeweils den Definitionsbereich der Wurzel

a) $\sqrt{x-4}$ $\quad \mathbb{D} = \{x \mid x \geq 4\}$

b) $\sqrt{5-2x}$ $\quad \mathbb{D} = \left\{x \mid x \leq \frac{5}{2}\right\}$

c) $\sqrt{\sqrt{x}-4}$ $\quad \mathbb{D} = \{x \mid x \geq 16\}$

d) $\sqrt{-2-x^2}$ $\quad \mathbb{D} = \{\ \}$

---

5 Vereinfache so weit wie möglich.
„Vereinfachen" heißt hier: Klammern auflösen, so wenig Summanden wie möglich, unter den Wurzeln soll der Radikand so klein wie möglich sein.

a) $\sqrt{a} - 3\cdot\sqrt{a} + 8\cdot\sqrt{b} = -2\cdot\sqrt{a} + 8\cdot\sqrt{b}$

b) $\sqrt{(3b+5)^2} = |3b+5|$

c) $\left(a-\sqrt{ab}\right)\cdot\sqrt{b}=a\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt{b}=a\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a\cdot b^2}=a\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=a\cdot\sqrt{b}-\sqrt{a}\cdot b$

Anmerkung: Damit die Wurzeln überhaupt existieren, müssen a und b größer als 0 sein.
Man darf deshalb die Betragstriche weglassen.

d) $\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)^2=\sqrt{2x}^2-2\cdot\sqrt{2x}\cdot\sqrt{2y}+\sqrt{2y}^2=2\cdot x-2\cdot\sqrt{4xy}+2\cdot y=2\cdot x-4\cdot\sqrt{xy}+2\cdot y$

Anmerkung: Damit die Wurzeln überhaupt existieren, müssen x und y größer als 0 sein.
Man darf deshalb die Betragstriche weglassen.

e) $\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{2}=\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{2}=5\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}$

f) $\left(\sqrt{z+2}-\sqrt{z-2}\right)\left(\sqrt{z+2}+\sqrt{z-2}\right)=\sqrt{z+2}^2-\sqrt{z-2}^2=(z+2)-(z-2)=z+2-z+2=4$

Anmerkung: Damit die Wurzeln überhaupt existieren, muss z größer als 2 sein. Man darf deshalb die Betragstriche weglassen.

---

6 Bestimme durch Rechnung die Lösungsmengen folgender Gleichungen

a) $\sqrt{x^2+7}=4 \xrightarrow{(\ )^2} x^2+7=16 \xrightarrow{-7} x^2=9 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x|=3 \rightarrow x_{1,2}=\pm 3$

Probe: $\sqrt{(+3)^2+7}=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4\ ;\ \sqrt{(-3)^2+7}=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4 \rightarrow \mathbb{L}=\{-3;+3\}$

b) $x=1+\sqrt{5-2x} \xrightarrow{-1} x-1=\sqrt{5-2x} \xrightarrow{\sqrt{\ }} (x-1)^2=5-2x \rightarrow x^2-2x+1=5-2x \xrightarrow{+2x}$
$x^2+1=5 \xrightarrow{-1} x^2=4 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x|=2 \rightarrow x_{1,2}=\pm 2$

Probe: $1+\sqrt{5-2\cdot(-2)}=1+\sqrt{5+4}=1+\sqrt{9}=1+3=4\neq -2$
$1+\sqrt{5-2\cdot(+2)}=1+\sqrt{5-4}=1+\sqrt{1}=1+1=2=+2 \rightarrow \mathbb{L}=\{+2\}$

---

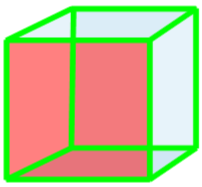
7 Forme die Brüche durch Erweitern oder Kürzen so um, dass im Nenner keine Wurzel mehr stehen bleibt und vereinfache dann so weit wie möglich

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}\overset{\sqrt{3}}{=}\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}\underset{3}{=}\sqrt{3}$ oder $\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\underset{\sqrt{3}}{=}\sqrt{3}$

b) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}\overset{\sqrt{3}+1}{=}\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{2\cdot\sqrt{3}+2}{3-1}=\frac{2\cdot\sqrt{3}+2}{2}\underset{2}{=}\sqrt{3}+1$

---

8 Ein Würfel soll aus jeweils 6 Quadraten von jeweils 30 cm² Flächeninhalt gebaut werden. Die Kanten sollen mit Klebeband aneinander befestigt werden. Berechne, wie lang das benötigte Klebeband sein muss. Rechnung angeben!



Aus der Skizze liest man ab: Es müssen 12 Kanten der Länge x mit Klebeband gesichert werden. Die Länge x der Kanten ergibt sich aus der Wurzel des Quadratflächeninhaltes.

$x=\sqrt{30\,cm^2}=\sqrt{30}\,cm\ ;\ 12\cdot\sqrt{30}\,cm\approx 65{,}7\,cm$

Man benötigt etwa 66 cm Klebeband.

9 Es gilt $\sqrt{a} = b$. Kann b eine ungerade Zahl sein, wenn a eine gerade Zahl ist?
Wenn „ja“, gib als Beispiel ein Wertepaar für a und b an,
wenn „nein“, begründe, warum das nicht geht.

Die Lösung ist „nein“.

Begründung: Die Gleichung kann nur stimmen, wenn $b^2 = a$.
Wäre b ungerade, so wäre die Zahl (b-1) gerade und (b-1) enthielte den Primfaktor 2.
$(b-1)\cdot b$ wäre dann gerade, da im Produkt der Faktor 2 enthalten ist und damit die Zahl durch 2 dividiert werden kann.
Da $(b-1)\cdot b+b= b^2-b+b=b^2$, muss b^2 dann ungerade sein, weil zu der geraden Zahl $(b-1)\cdot b$ die ungerade Zahl b addiert worden wäre.
Das ist aber ein Widerspruch zur Forderung „a ist gerade“. Also muss b immer gerade sein.

Andere Begründung:
Wenn a gerade ist, kann man schreiben $a=2\cdot n$, wobei n irgendeine natürliche Zahl ist.
Man kann aber nur dann die Wurzel aus $2\cdot n$ ziehen, wenn in n noch ein Faktor 2 vorhanden ist.
Man kann also sogar schreiben $a=4\cdot m$ mit irgendeiner natürlichen Zahl m.
Nun gilt $\sqrt{a} = \sqrt{4\cdot m} = 2\cdot\sqrt{m} = b$.
Da links vom rechten Gleichheitszeichen eine gerade Zahl steht (Faktor 2), muss auch rechts eine gerade Zahl stehen. Also ist b gerade und kann nicht ungerade sein.

---

10 Berechne näherungsweise $\sqrt{19}$ mit Hilfe des Heronverfahrens $x \leftarrow \frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{w}{x}\right)$.

Benutze den Startwert 5 und gib deine Zwischenergebnisse so weit an, bis sich diese Zwischenergebnisse nicht mehr ändern.

Zunächst werden der Näherungswert 5 im Speicher X und der Radikand 19 im Speicher W abgelegt. Dann wird so oft die Heronsche Formel auf diese Werte angewandt und das Ergebnis wird so oft in X gespeichert, bis sich der X-Wert vom vorherigen X-Wert nicht mehr unterscheidet:

```
5→X
               5
19→W
              19
```

```
19→W
              19
1/2*(X+W/X)
             4.4
Ans→X
             4.4
```

```
Ans→X
             4.4
1/2*(X+W/X)
     4.359090909
Ans→X
     4.359090909
```

```
Ans→X
     4.359090909
1/2*(X+W/X)
     4.358898948
Ans→X
     4.358898948
```

```
Ans→X
     4.358898948
1/2*(X+W/X)
     4.358898944
Ans→X
     4.358898944
```

```
1/2*(X+W/X)
     4.358898944
Ans→X
     4.358898944
1/2*(X+W/X)
     4.358898944
```

Das Näherungsergebnis ist also $\sqrt{19} \approx 4{,}358898944$.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!