06.03.2002 Klasse 10fa Mathematik

Fachbezogene Leistungsüberprüfung im Fach Mathematik

Lösung

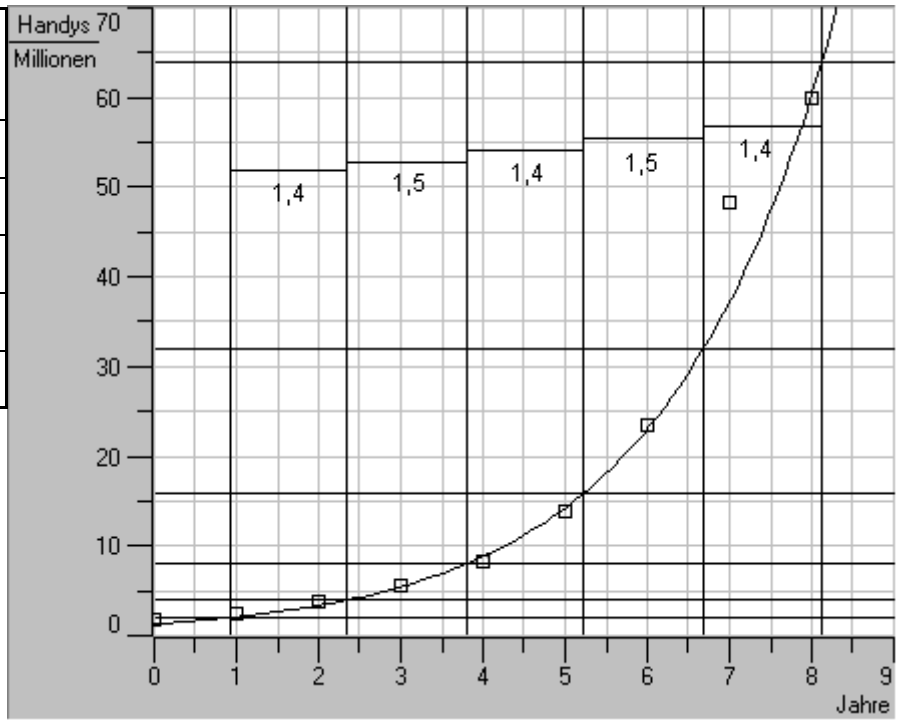
1 Die nebenstehende Grafik zum Handy-Boom stammt aus dem Diepholzer Kreisblatt vom 09.02.2002. Unten auf dieser Seite sind die Werte noch einmal abgetragen und durch eine Exponentialkurve angenähert.
Der Einfachheit halber wird dabei für die Darstellung das Jahr 1993 mit 0 bezeichnet, 1994 mit 1 usw.

a) Begründe, warum sich bei exponentiellem Wachstum die Anzahl in immer gleichen Abständen verdoppelt.

Wächst bei der Gleichung $y=c\cdot a^x$, die das exponentielle Wachstum beschreibt, das x um einen konstanten Wert d an, so ergibt sich $y=c\cdot a^{x+d}=c\cdot a^x\cdot a^d$, d.h. der y-Wert wächst um den Faktor a^d an. Erhöht sich der Wert des Exponenten immer wieder um den selben Wert d, vergrößert sich y auch immer um den Faktor a^d. Ist $a^d=2$, dann verdoppelt sich die Anzahl bei linear wachsendem Exponenten.

b) Ermittle durch Ablesen an mehreren Stellen in der untenstehenden Abbildung, wie lang die Verdoppelungszeit beim Handy-Bestand ist.

Unterschied in Millionen Handys	*Unterschied in Jahren*
2 bis 4	*1,4*
4 bis 8	*1,5*
8 bis 16	*1,4*
16 bis 32	*1,5*
32 bis 64	*1,4*



Man sieht, dass die Verdoppelungszeit konstant ist. Als Mittelwert ergibt sich
$\frac{3\cdot 1{,}4+2\cdot 1{,}5}{5}=1{,}44$

c) Die Gleichung, die der untenstehenden Kurve zu Grunde liegt, hat die Form $y=c\cdot a^x$.
Bestimme durch Ablesen geeigneter Koordinaten und durch Rechnung die Werte für a und c.

Gewählt werden Punkte mit ganzzahligen Koordinaten: (3/5) und (8/60)
Einsetzen in $y=c\cdot a^x$ gibt $5=c\cdot a^3$ und $60=c\cdot a^8$. Die beiden Gleichungen werden durcheinander dividiert. Ergebnis: $12=a^5$. Daraus folgt: $a=\sqrt[12]{5}\approx 1{,}64375\approx 1{,}64$.
Für c ergibt sich: $c=\frac{60}{a^8}=\frac{60}{\sqrt[12]{5^8}}\approx 1{,}1258\approx 1{,}13$. *Also: $y=1{,}13\cdot 1{,}64^x$.*

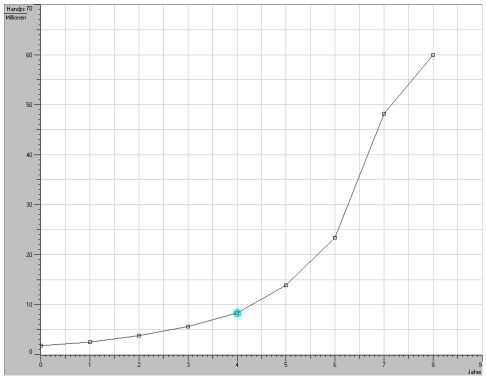
Für die Rechnungen in d) und f) wird die Formel aus c) benutzt. Steht diese nicht zur Verfügung, kann die Berechnung auch anders erfolgen, z.B. über die Verdoppelungszeit.

d) Berechne, in welchem Jahr es 1.000.000 Mobilfunk-Teilnehmer gab.

Zu setzen ist y=1 (y wird in Millionen angegeben!). Daraus folgt: $1=1{,}13 \cdot 1{,}64^{x} \Rightarrow 1{,}64^{x}=1/1{,}13 \Rightarrow x=\log_{1,64}(1/1{,}13)\approx -0{,}25$.

Das entspricht einem viertel Jahr, d.h. im Jahr 1992 gab es 1.000.000 Handynutzer.

e) Ein Wert passt nicht zur vorgegebenen Kurve. Suche Gründe für die Abweichung.



Der Wert (7/48,2) liegt nicht auf der Kurve. Entweder wurden im Jahr 2000 vermehrt Handys gekauft (Gründe z.B. massive Werbung, Jahrtausendwechsel, ...) oder es ist hier schon der Übergang zur weiteren Entwicklung (Sättigung des Marktes) zu erkennen. Auf alle Fälle gilt: Wachstumsprozesse dieser Art sind nicht an mathematische Formeln gebunden. Die Mathematik beschreibt zeitliche Verläufe, gibt sie aber nicht vor.

f) Ob die unter c) berechnete Gleichung auch für die Zeit vor 1993 und nach 2001 gültig ist? Begründe deine Antworten durch Beispielrechnungen.
(Zu deiner Information: 1978 gab es in Deutschland einen flächendeckenden Betrieb für 16.000 Mobilfunk-Teilnehmer. Im zu betrachtenden Zeitraum hat sich die Bevölkerungszahl Deutschlands nicht wesentlich geändert und beträgt 80 Millionen Menschen.)

Wie viele Handys gab es 1978 (entspricht x=-15)? $y=1{,}13 \cdot 1{,}64^{-15}\approx 0{,}00068$, *d.h. 680 Handys.*

In Wirklichkeit gab es aber 16.000 Handys, d.h. die Gleichung beschreibt die Zeit vor 1993 nicht korrekt.

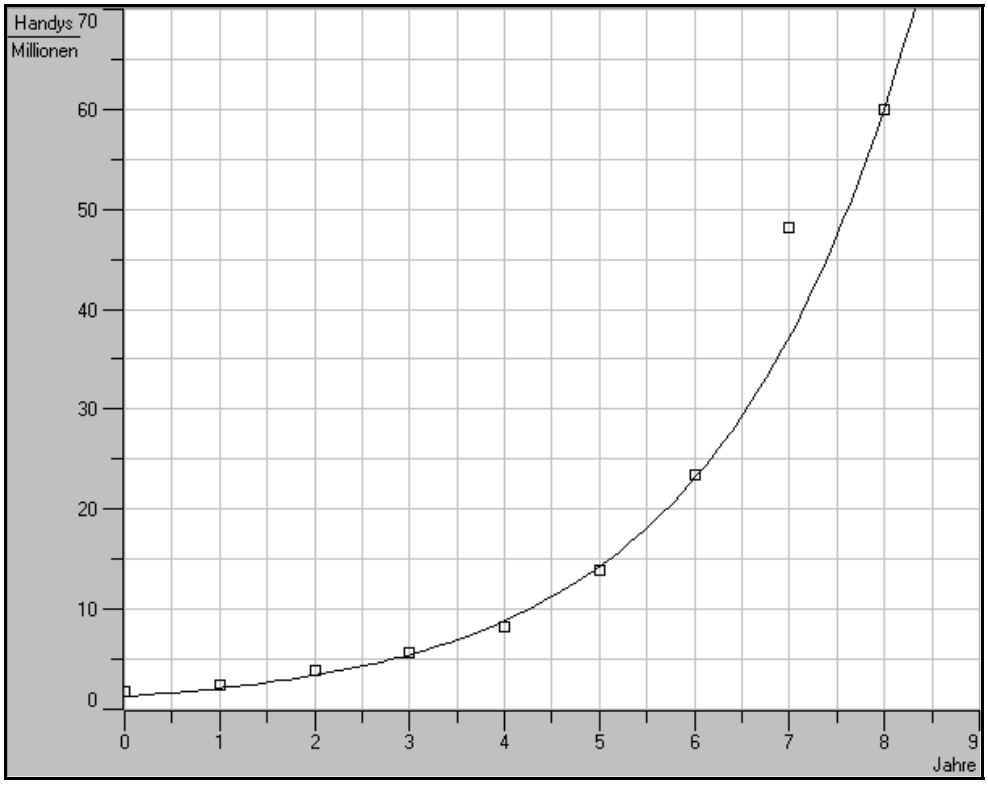
Auch für die Zukunft kann die Gleichung keine korrekte Voraussage machen, denn die Anzahl der Handynutzer kann höchstens so groß sein wie die Bevölkerungszahl, also 80 Millionen und im Schnitt wird niemand mehr als einige wenige Handys besitzen.

Beispiel für 2013 (entspricht x=20): $y=1{,}13 \cdot 1{,}64^{20}\approx 22385$ *, d.h. 22.385.000.000 Handys.*

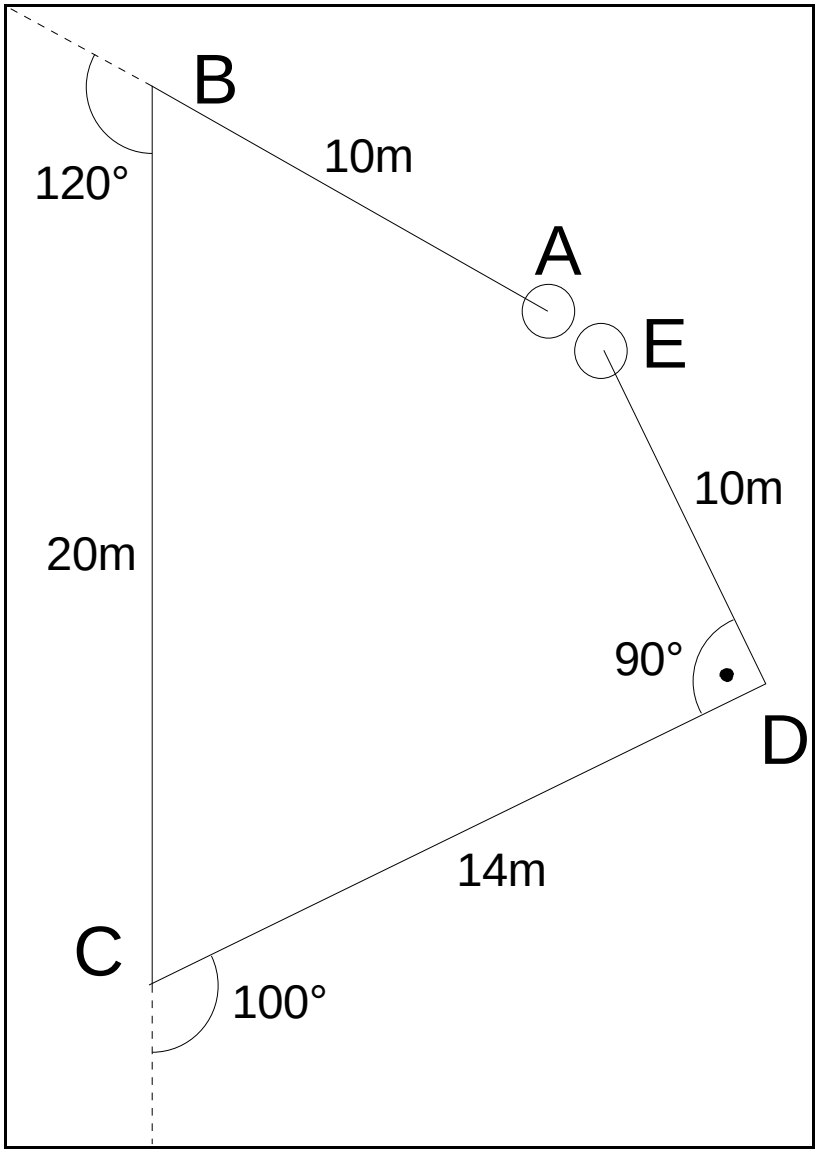
Jeder müsste also $22.385.000.000/80.000.000\approx 280$ *Handys besitzen. Das ist aber nicht realistisch.*

Folglich beschreibt die Gleichung auch für die Zukunft die Handy-Zahl nicht richtig.

(Hinweis: exponentielle Wachstumsprozesse, die in einen Sättigungsbereich übergehen, lassen sich mit dem so genannten „logistischen Wachstum“ besser beschreiben)



2 Ein Forscher hat einen Geheimgang unter einer Burg erkundet und sich dabei nebenstehende (nicht maß-stabgerechte) Skizze angefertigt. Er berichtet: „Alle Teilstücke des Ganges verliefen schnurgerade. Von einem prunkvollem Zimmer A aus ging ich 10m in eine Richtung, musste mich dann am Punkt B um 120° nach links drehen und konnte dann 20m geradeaus gehen. Bei C angekommen ging es wieder nach links, diesmal um 100°. Nach 14m war ich am Punkt D, bog im rechten Winkel nach links ab und erreichte ein zweites prunkvolles Zimmer E nach 10m. Ich wunderte mich über die Fähigkeiten der Baumeister, denn die Länge der Gänge und die Winkel waren exakt so, wie ich sie hier angegeben habe. Auf Grund meiner Zeichnung vermute ich nun, dass die beiden Zimmer A und E lediglich durch eine dünne Mauer voneinander getrennt sind.“ So weit der Bericht des Forschers.



Die Lösungen beziehen sich auf die Zeichnung auf der nächsten Seite.
Die Teile der Originalzeichnung sind weiterhin in Schwarz dargestellt.
Alle Einzeichnungen sind farbig:
Winkel sind in blau eingezeichnet und mit blauen Ziffern gekennzeichnet. In den Lösungen werden die Winkel durch W# gekennzeichnet, wobei # durch die Ziffer des Winkels ersetzt ist.
Strecken sind in grün, orange und rot eingezeichnet und mit Buchstaben der zugehörigen Farbe bezeichnet.

a) Der Punkt C scheint am weitesten von A entfernt zu sein. Berechne diese Entfernung.

Winkel 1 ergibt sich als Ergänzungswinkel von 120° zu 180°: 180°-120°=60°.

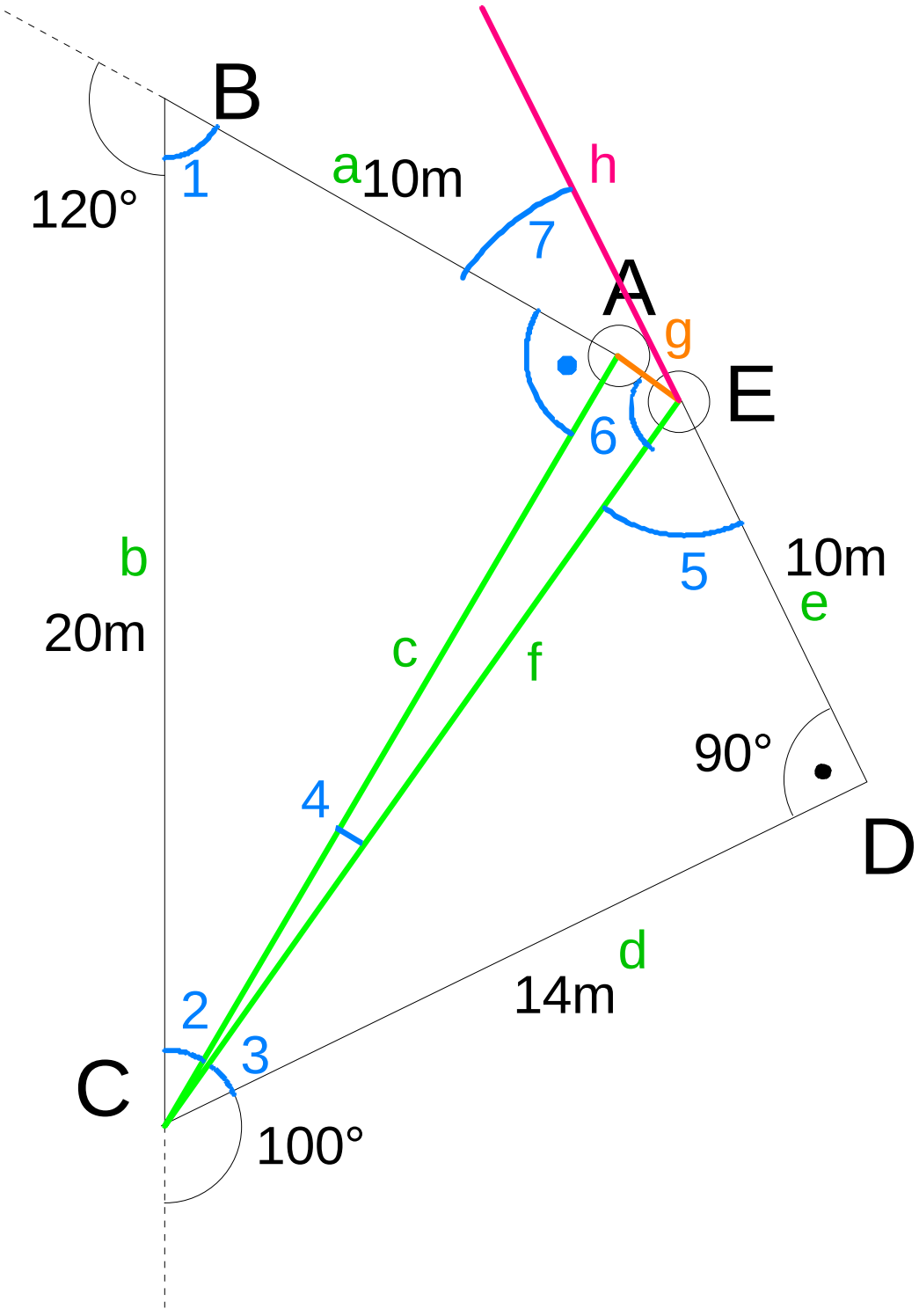
Fällt jetzt auf, dass cos 60°=1/2=10/20 ist, sieht man sofort, dass bei A ein rechter Winkel sein muss und das Dreieck ABC somit rechtwinklig ist. Die Rechnung zu dieser Aufgabe wird dann wesentlich einfacher als im Folgenden dargestellt.

Noch einfacher ist es, wenn man erkennt, dass das Dreieck ABC die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks ist mit der gesuchten Seite c als Höhe.

Aber jetzt die schwierige Rechnung:

Kosinussatz: $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(W1)=100+400-400\cdot\cos(60°)=500-400\cdot 0{,}5=500-200=300$

Also: $c=\sqrt{300}$.



b) Der Forscher vermutet, die beiden Räume A und E seien nur durch eine dünne Mauer voneinander getrennt. Bestätige oder widerlege diese Vermutung durch Rechnung.

Zu berechnen ist der Abstand A bis E, also die Länge der Strecke g.
Dazu benötigt man die Winkel 2, 3 und 4 und die Länge der Strecke f.

Winkel 2: Sinussatz: $\frac{\sin(W2)}{a} = \frac{\sin(W1)}{c} \Rightarrow \sin(W2) = \frac{\sin(W1)\cdot a}{c} = \frac{\sin(60°)\cdot 10}{\sqrt{300}} = 0{,}5$.
Also W2=30°.

Da Dreieck CDE rechtwinklig ist, ergibt sich Winkel 3 mit tan(W3)=e/d=10/14 zu W3≈35,54°.
Der Innenwinkel bei C ist Ergänzungswinkel von 100° zu 180°, also 180°-100°=80°.
Für Winkel 4 ergibt sich also: W4=80°-W2-W3≈80°-30°-35,54°=14,46°.

Strecke f ergibt sich z.B. über Pythagoras: $f = \sqrt{e^2 + d^2} = \sqrt{100 + 196} = \sqrt{296}$
Nun kann man g mit Kosinussatz berechnen:

$$g^2 = c^2 + f^2 - 2g\cdot f\cdot\cos(W4) \approx 300 + 296 - 2\cdot\sqrt{300\cdot 296}\cdot\cos(14{,}46°) \approx 18{,}89$$

Also: g≈4,3. Eine dünne Mauer ist sicher nicht 4,3m dick, aber wenn die Punkte A und E im Zentrum der Räume liegen, könnte die Vermutung des Forschers doch stimmen.

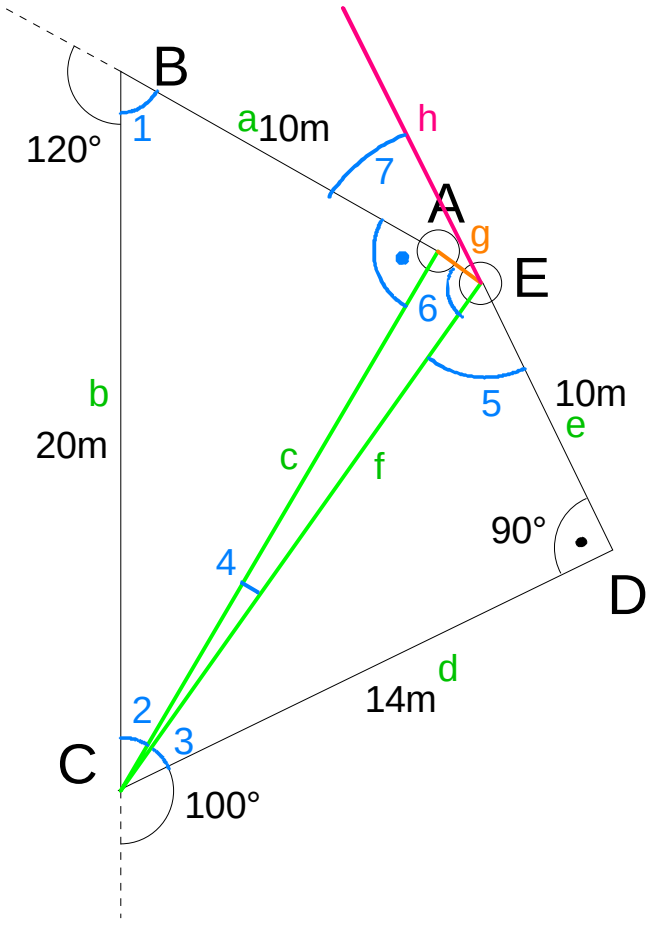
---

c) Berechne, um wie viel Grad der Forscher seine Richtung ändern müsste, wenn er bei E angekommen ist und dann geradeaus nach A gehen will?

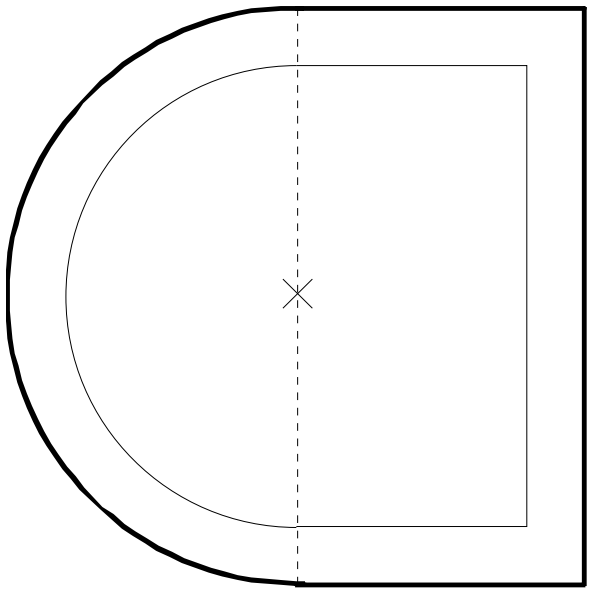
Bei E angekommen blickt der Forscher in Richtung der roten Halbgeraden h. Er müsste also um den Winkel 7 aus seiner Richtung abweichen. W7 ergibt sich als Ergänzungswinkel zu 180° für die Summe der Winkel W5 und W6.
Winkel W5 über Tangens wegen des rechtwinkligen Dreiecks CDE: tan(W5)=d/e=14/10=1,4.
Also: W5≈54,46°.
W6 ergibt sich mit Kosinussatz im Dreieck CEA:

$$c^2 = f^2 + g^2 - 2f\cdot g\cdot\cos(W6) \Rightarrow \cos(W6) = \frac{f^2 + g^2 - c^2}{2f\cdot g} = \frac{296 + 18{,}89 - 300}{2\cdot\sqrt{296\cdot 18{,}89}} \approx 0{,}0996$$

Also: c≈84,28°.
Nun W7:
W7=180°-W5-W6≈
180°-54,46°-84,28°=41,26°.
Der Forscher muss also um etwa 41° nach links abbiegen.



3 Der Bocksturm in Osnabrück (Abb. unten) war früher (ohne Dach) 28m hoch. Wegen Baufälligkeit wurden 10m abgetragen und dann ein Dach aufgesetzt.
Der Grundriss des Turms sieht aus wie ein halbes Quadrat mit angesetztem Halbkreis. Der Außen-Durchmesser des Turms (gestrichelte Linie) beträgt 12m. Die Mauern sind 1m dick.
Das Spitzdach hat eine Höhe von 6m. Im Bereich des halben Quadrats hat es die Form einer quadratischen geraden Pyramide, im runden Bereich die Form eines geraden Kegels. Die gemeinsame Spitze der Pyramide und des Kegels ist im Grundriss durch ein Kreuz markiert.



a) Berechne das Volumen des freien Innenraums im Turm (ohne Dachraum).

Der freie Innenraum setzt sich aus einem halben Kreiszylinder und einem halben quadratischen Prisma zusammen.
Kantenlänge des Turms außen: 12m, d.h. Kantenlänge des Innenraums 10m und Radius des Innenraums damit 5m.
Halbe Quadratfläche: $1/2 \cdot 10 \cdot 10 = 50$, halbe Kreisfläche: $1/2 \cdot \pi 5^2 = 12{,}5 \cdot \pi$.
Die Höhe des Turms beträgt nach dem Umbau 18m.
Also ergibt sich für das Innenvolumen: $V = 18 \cdot (50 + 12{,}5 \cdot \pi) \approx 1606{,}9$.
Das gesuchte Volumen beträgt also etwa 1607m³.

---

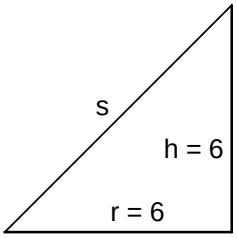
b) Berechne die Masse der Sandsteine, die zum Bau des Turms benötigt wurden. Bekannt ist, dass 1m³ Sandstein die Masse 2t (=2000kg) hat.

Zunächst muss das Volumen der Mauern berechnet werden. Es ergibt sich als Differenz von Außenvolumen und Innenvolumen.
Dazu wird erst einmal die Grundfläche der Mauern berechnet.
Halber Kreisring mit den Radien 6 und 5: $A_{Kreisring} = 1/2 \cdot (\pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 5^2)$
Mauern im eckigen Bereich: Halbes großes Quadrat minus halbes kleines Quadrat:
$A_{Rechteck} = 1/2 \cdot (12^2 - 10^2) = 1/2 \cdot 44 = 22$
Multipliziert mit der Höhe 18 ergeben diese beiden Flächen dann das Mauervolumen:
$V = 18 \cdot A_{Kreisring} \cdot A_{Rechteck} = 18 \cdot (1/2 \cdot (\pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 5^2) + 22) \approx 707$
Das Volumen beträgt also etwa $707m^3$. Da jeder Kubikmeter eine Masse von 2000kg hat, ist die Gesamtmasse etwa $707 \cdot 2000kg = 1.414.000kg$ oder 1414 Tonnen.

---

c) Berechne, wie viele Dachziegel man in etwa zum Decken des Dachs gebrauchte. Die deckende Fläche einer Dachziegel beträgt etwa 800cm².

Zunächst muss die Dachfläche berechnet werden. Sie setzt sich zusammen aus dem halben Mantel eines Kreiskegels und aus dem halben Mantel einer quadratischen Pyramide.
Formel für den Kegelmanten: $M = \pi \cdot r \cdot s$. Der Kreiskegel hat den Radius 6 und die Höhe 6.



Daraus ergibt sich mit Pythagoras s zu $s = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} \approx 8{,}49$.

Also $M = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{72} \approx 79{,}97 \approx 80$.

Die Seitenflächen der Pyramide bestehen aus Dreiecken, deren Grundseite 6m lang ist und deren Höhe der Seite s des Kegels entspricht.

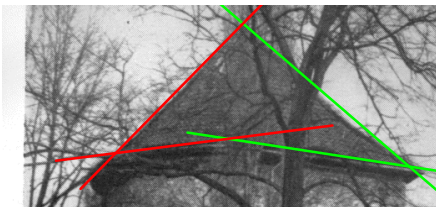
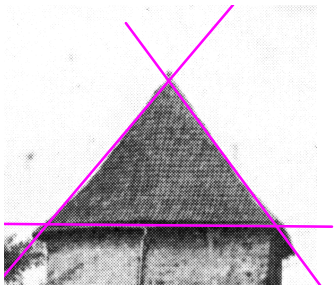
Eine Dreiecksfläche hat also den Inhalt $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{72} \approx 50{,}91 \approx 51$.

Benötigt werden für den halben Pyramidenmantel eine ganze und 2 halbe Dreieckseiten, also zusammen 2 Dreieckseiten.
Die gesamte Mantelfläche des Dachs ist also:

$$M + 2 \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{72} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{72} = (3\pi + 12) \cdot \sqrt{72} \approx 181{,}8$$

Die Fläche eines Dachziegels beträgt 800cm^2=0,08m^2.
Man benötigte also etwa 181,8/0,08=2272,5, also knapp 2300 Dachziegel.

---

d) Bestimme aus den untenstehenden Abbildungen den Winkel zwischen der Dachschräge und der waagrechten oberen Begrenzungsfläche des Turms näherungsweise durch Ablesen und überprüfe deine Messung durch Rechnung mit den angegebenen Werten.
Falls Unterschiede auftreten: Suche Gründe für diese Unterschiede.

Während das rechte Bild für eine Messung anscheinend geeignet erscheint, fällt es bei dem linken Bild schon schwer, die Schenkel des Winkels einzuzeichnen (Linien zur Auswertung in Farbe eingezeichnet)
Messungen ergeben Winkel zwischen 50° und 55° im rechten Bild und 30° bis 40° im linken Bild.
Rechnerisch ergibt sich aus der obenstehenden Zeichnung der Winkel als Basiswinkel im rechtwinkligen gleichschenkligem Dreieck zu 45°.
Die Abweichungen sind hauptsächlich durch die perspektivische Verzerrung in den Abbildungen zu erklären. In keinem der Bilder ist die Höhe des Beobachters identisch mit der Höhe der Grundseite des Dachs.