14.12.2001 Klassenarbeit 2 Klasse 10fa Mathematik

Lösungsblatt

1 Der Umfang eines Kreises in Meter und der Flächeninhalt des Kreises in Quadratmeter stimmen im Zahlenwert überein. Berechne den Radius des Kreises.

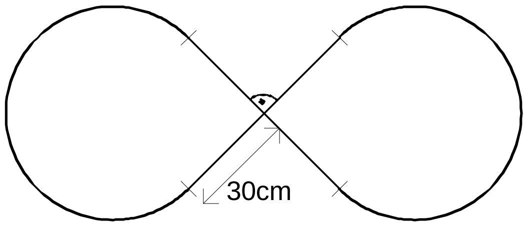
Lösung:

$U = 2\cdot\pi\cdot r \quad ; \quad A = \pi\cdot r^2 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot\pi\cdot r = \pi\cdot r^2 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot r = r^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0\,;\, r_2 = 2$

Für r=0 ist der Kreis nur ein Punkt, deshalb hat der Kreis den Radius r=2cm.

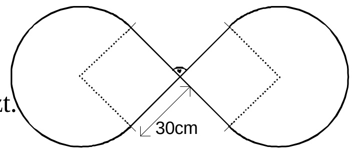
---

2 Das Starterset einer Modelleisenbahn besteht aus einer rechtwinkligen Kreuzung mit 30cm „Armlänge“ und zwei angesetzten Teilkreisen (siehe Abbildung). Berechne die Länge der Gleis-Acht und den Flächeninhalt der Fläche, die von der Acht umrandet wird. Die Gleisbreite ist zu vernachlässigen.



Lösung:

Zeichnet man Hilfslinien (wie nebenstehend) ein, so erkennt man leicht, dass sich die Figur aus 2 Dreiviertel-Kreisen und zwei Quadraten zusammensetzt. Daraus folgt:



Umfang: $U = 2\cdot 2\pi r\cdot\frac{270°}{360°} + 4\cdot 30 = 90\pi + 120 \approx 402{,}7$, d.h. die Gleislänge beträgt rund 4m.

Fläche: $A = 2\cdot\pi r^2\cdot\frac{270°}{360°} + 2\cdot 30^2 = 2\cdot\pi\cdot 900\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot 900 = 1350\cdot\pi + 1800 \approx 6041{,}15$, d.h. die umschlossene Fläche hat einen Inhalt von etwa 6040cm² bzw. 0,6m².

Fällt Euch auf, dass der Flächeninhalt exakt 15 mal so groß ist wie der Umfang?
Ist das zufällig bei dem gegebenen Wert 30cm so oder gilt das immer?

---

3 Ein Uhrmacher möchte ins Guinness-Buch der Rekorde kommen und konstruiert dazu die größte Zeigeruhr der Welt mit Stunden-, Minuten- und Sekundenzeiger. Alle Zeiger sollen gleich lang sein.
Der Uhrmacher muss dabei beachten, dass sich kein Teil eines Zeigers mit Schallgeschwindigkeit (340m/s) oder schneller bewegt, da sonst der Zeiger zerstört würde.
Berechne die Obergrenze für die Länge der Zeiger.

Lösung:

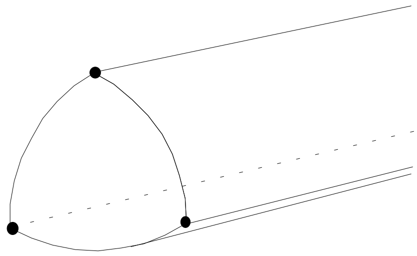
Da der Sekundenzeiger der schnellste Zeiger ist, muss man nur ihn betrachten. Seine äußerste Spitze legt in 1 Sekunde 340m zurück, d.h. in einer Minute (=60 Sekunden) 60·340m=20400m. Dieser Wert gibt den Umfang des von der Spitze gezeichneten Kreises an. Dessen Radius ist gesucht:

$$2\pi r = 20400m \Rightarrow r = \frac{20400m}{2\pi} \approx 3247m \approx 3{,}25km$$

Eine solche Zeigerrlänge wäre nicht nur wegen der Schallgeschwindigkeit nicht erreichbar, sondern sicher auch, weil es kein Material gibt, das einen so langen beweglichen Zeiger stabil halten könnte.

---

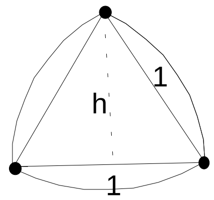
4 Eine Firma stellt Bleistifte her, die besonders gut in der Hand liegen sollen. Dazu wird die Schnittfläche aus drei Kreisbögen gleicher Länge konstruiert. Die Mittelpunkte der drei Kreise liegen jeweils an den Endpunkten der Kreisbögen (dicke Punkte in der Zeichnung). Die Bleistift-Rohlinge haben eine Länge von 15cm und der Radius der verwendeten Kreise beträgt 1 cm.
Berechne das Volumen eines Bleistiftrohlings.



Lösung:

Der Bleistift ist ein Prisma mit einem „Rund-Dreieck“ als Grundfläche. Mit Hilfe dreier Hilfslinien erkennt man leicht, dass sich die Fläche des Gebildes berechnen lässt aus:
3 mal Kreisausschnitt (Winkel 60°) minus 2 mal Fläche des gleichseitigen Dreiecks.

Kreisausschnitt: $A = \pi r^2 \cdot \frac{60°}{360°} = \frac{\pi}{6}$



Dreieck: nach Pythagoras gilt $h = \sqrt{1^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und damit

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Fläche des Gebildes: $3 \cdot \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$

Volumen des Prismas mit der Höhe 15: $V = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \cdot 15 \approx 10{,}6$

Der Bleistiftrohling hat also etwa das Volumen 10,6cm³.

---

5 Die Cheopspyramide hat ein Quadrat als Grundfläche mit der Seitenkante 233m. Die Höhe betrug ursprünglich 146,6m. Heute ist die Pyramide 10m kleiner, weil der obere Teil im Laufe der Zeit als Baumaterial entwendet wurde.

a) Berechne das Volumen der Originalpyramide.

Lösung:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$; $G = 233m \cdot 233m = 54289m^2$; $h = 146{,}6m$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot 54289m^2 \cdot 146{,}6m \approx 2652922m^3$$

b) Berechne, wie viel Kubikmeter Baumaterial unsere Vorfahren von der Pyramide geholt haben.

Lösung:

Die Grundkante der abgebauten Pyramide berechnet sich über den Strahlensatz:

$$\frac{Grundkante\,abgebaute\,Pyramide}{Grundkante\,ganze\,Pyramide} = \frac{Höhe\,abgebaute\,Pyramide}{Höhe\,ganze\,Pyramide}$$, d.h.

$$\frac{g_a}{g_g} = \frac{h_a}{h_g} \Rightarrow g_a = \frac{h_a \cdot g_g}{h_g} = \frac{10m \cdot 233m}{146{,}6m}$$. Daraus folgt:

$$V_a = \frac{1}{3} \cdot g_a^{\,2} \cdot h_a = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{10m \cdot 233m}{146{,}6m}\right)^2 \cdot 10m \approx 842m^3$$

---

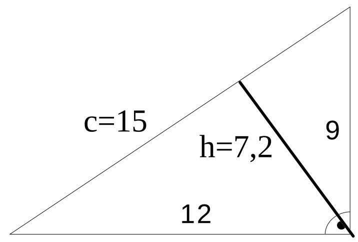
6 Ein rechtwinkliges Zeichendreieck hat die Seitenlängen (Katheten) 9cm und 12cm.

a) Berechne die Länge der dritten Seite.

Lösung:

Mit dem Satz vom Pythagoras gilt für die dritte Seite c:

$$c = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$



b) Lasse das Dreieck um jede der drei Seiten rotieren. Dabei entsteht jeweils ein Körper mit unterschiedlichem Volumen. Berechne die Volumina aller drei Körper und gib an, um welche Kante man das Dreieck rotieren lassen muss, damit das Volumen möglichst groß wird.

Lösung:

I) Rotation um die Seite mit der Länge 9:

Es entsteht ein Kegel mit dem Radius 12 und der Höhe 9 $\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 9 \approx 1357{,}2$

II) Rotation um die Seite mit der Länge 12:

Es entsteht ein Kegel mit dem Radius 9 und der Höhe 12 $\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 \approx 1017{,}9$

III) Rotation um die Seite c mit der Länge 15:

Benötigt wird als Radius die Höhe h_c des Dreiecks. Günstige Berechnung über folgende Überlegung:

Fläche des Dreiecks ist $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot h_c \Rightarrow h_c = \frac{9 \cdot 12}{15} = 7{,}2$

Es entstehen bei der Rotation zwei Kegel mit den Höhen h_1 und h_2 und den Volumina V_1 und V_2. Für das Gesamtvolumen gilt: $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}2^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}2^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}2^2 \cdot (h_1 + h_2)$

Da $h_1 + h_2 = c$ gilt $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}2^2 \cdot 15 \approx 814{,}3$

Je kürzer die Kante ist, um die das Dreieck rotiert, desto größer wird das Volumen des Körpers, also ergibt sich bei Rotation um die Kante mit der Länge 9 das größte Volumen.

Formeln:

Kreis-Umfang: $U = 2 \cdot \pi \cdot r$

Kreis-Fläche: $A = \pi \cdot r^2$

Kreis-Bogen: $b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°}$

Kreis-Ausschnitt: $A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$

Quader-Volumen: $V = a \cdot b \cdot c$

Prisma-Volumen: $V = G \cdot h$

Prisma-Oberfläche: $O = M + 2 \cdot G$

Zylinder-Volumen: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Zylinder-Mantel: $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Zylinder-Oberfläche: $O = M + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

Pyramiden-Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Pyramiden-Oberfläche: $O = M + G$

Kegel-Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Kegel-Mantel: $M = \pi \cdot r \cdot s$

Kegel-Oberfläche: $O = M + \pi \cdot r^2$

Kugel-Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Kugel-Oberfläche: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
