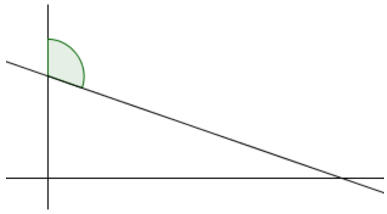
2010-12-06 Klassenarbeit 2 Klasse 9c Mathematik

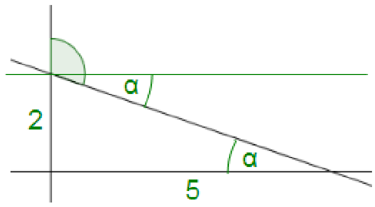
Lösung

1 In der Skizze ist der Verlauf des Graphen von $y=-\frac{2}{5}\cdot x+2$ angedeutet (Zeichnung ist nicht genau!).

Berechne die Winkelgröße des eingezeichneten Winkels.



Der gesuchte Winkel setzt sich zusammen aus dem Winkel α, der sich aus dem Steigungsdreieck (siehe Skizze) berechnen lässt und einem 90°-Winkel.

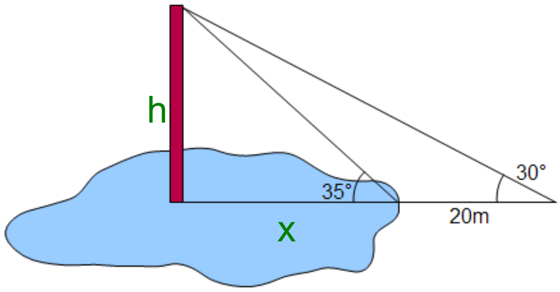


Es gilt $\tan\alpha=\frac{2}{5}\ \rightarrow\ \alpha\approx 21{,}8°$ *Gesuchter Winkel: 90°+21,8°=111,8°*

---

2 In einem See steht ein Funkturm.
Eine gerade Strecke von 20m wird abgemessen. Diese Strecke läuft genau in Richtung des Funkturmes und endet genau am Ufer des Sees.

Berechne, wie weit der Funkturm vom Ufer des Sees entfernt ist. Es ist die Stelle des Ufers gemeint, an der sich das eine Ende der abgemessenen Strecke befindet.



Die Höhe des Turms wird mit h, der gesuchte Abstand mit x bezeichnet.

$$\tan 30°=\frac{h}{x+20}\ \rightarrow\ h=(x+20)\cdot\tan 30°\ ;\ \tan 35°=\frac{h}{x}\ \rightarrow\ h=x\cdot\tan 35°\ \rightarrow$$

$$x\cdot\tan 35°=(x+20)\cdot\tan 30°=x\cdot\tan 30°+20\cdot\tan 30°\ \rightarrow\ x\cdot\tan 35°-x\cdot\tan 30°=20\cdot\tan 30°\ \rightarrow$$

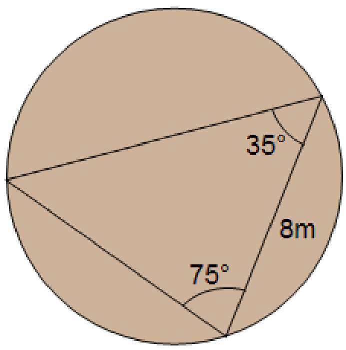
$$x\cdot(\tan 35°-\tan 30°)=20\cdot\tan 30°\ \rightarrow\ x=\frac{20\cdot\tan 30°}{\tan 35°-\tan 30°}\approx 94$$

Der Turm steht also 94 m vom Seeufer entfernt. *Alternative Lösung auf Seite 4 unten.*

---

3 Der Durchmesser eines Karussells soll bestimmt werden.
Dazu trägt man eine Sehne (=gerade Strecke von Kreislinie bis Kreislinie) von 8m Länge ab und misst von den Endpunkten der Sehne die Winkel zu einem markierten Punkt auf dem Kreisumfang (siehe nicht maßstabsgerechte Skizze).

Berechne den Durchmesser der Karussellscheibe.



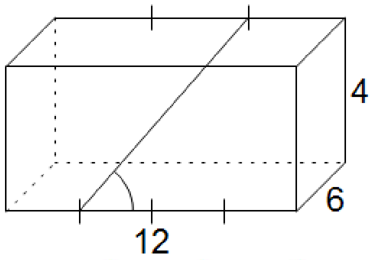
Zur Lösung wird der erweiterte Sinussatz benutzt: $2\cdot r=\frac{a}{\sin\alpha}$.

Mit a=8m ist α der fehlende Winkel im Dreieck: $\alpha=180°-35°-75°=70°$

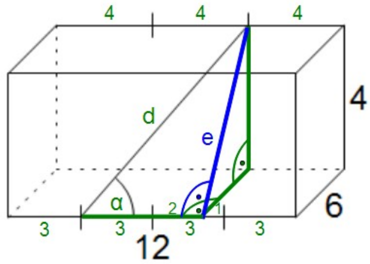
Berechnung des Durchmessers d: $d=2\cdot r=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{8\,m}{\sin 70°}\approx 8{,}5\,m$

Der Durchmesser beträgt also etwa 8,5m.

4 Ein Quader mit den Seitenlängen 12, 6 und 4 ist gegeben (siehe nicht maßstabsgerechte Skizze).
Die vordere untere Seite ist in 4 gleich lange Stücke aufgeteilt, die obere hintere Seite in 3 gleiche Teile.



Berechne die Größe des markierten Winkels, der sich zwischen der eingezeichneten Raumdiagonale und der vorderen unteren Seite befindet.



Die Einzeichnungen in der Planfigur (in grün) zeigen:

Die Diagonale d kann mit Hilfe des Pythagoras aus der Länge dreier Strecken (4, 6, 3+2=5) berechnet werden:

$$d^2=4^2+6^2+5^2=16+36+25=77 \;\rightarrow\; d=\sqrt{77}$$

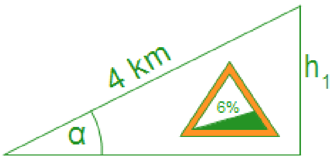
Das Dreieck mit dem Winkel α und den Seiten d und e ist rechtwinklig. Daher kann man α aus den anliegenden Seiten mit dem Kosinus berechnen: $\cos\alpha=\frac{5}{d}=\frac{5}{\sqrt{77}} \;\rightarrow\; \alpha=\arccos\frac{5}{\sqrt{77}}\approx 55{,}3°$.

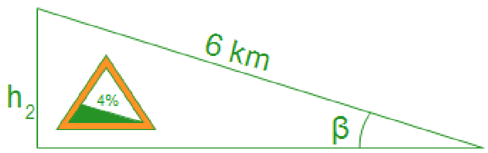
---

5 Wenn man Vorgänge in der Umwelt rechnerisch untersuchen will, muss man oft vereinfachen. So auch in der folgenden Aufgabenstellung:

Eine Straße steigt während einer Fahrstrecke von 4 km mit 6% an und hat danach auf 6 km Fahrstrecke ein Gefälle von 4%.

a) Finde durch Rechnung heraus, ob man am Ende der gesamten Strecke höher, tiefer oder auf gleicher Höhe ist wie zu Beginn der Strecke.
Rechne so genau wie möglich.





Die Längen der Strecken h_1 und h_2 müssen berechnet und verglichen werden.
Die Winkel α und β ergeben sich daraus, dass der Tangens des Steigungswinkels gleich der prozentualen Steigung ist. Die Werte für h werden mit Hilfe der Winkel und der bekannten Fahrstrecke mit dem Sinus berechnet.

$$\tan\alpha=6\,\%=\frac{6}{100} \;\rightarrow\; \alpha=\arctan\frac{6}{100} \;;\; \tan\beta=4\,\%=\frac{4}{100} \;\rightarrow\; \beta=\arctan\frac{4}{100}$$

$$\sin\alpha=\frac{h_1}{4\,km} \;\rightarrow\; h_1=4\,km\cdot\sin\alpha=4\,km\cdot\sin\left(\arctan\frac{6}{100}\right)\approx 0{,}2395691629\,km=239{,}5691629\,m$$

$$\sin\beta=\frac{h_2}{6\,km} \;\rightarrow\; h_2=6\,km\cdot\sin\beta=6\,km\cdot\sin\left(\arctan\frac{4}{100}\right)\approx 0{,}2398082301\,km=239{,}8082301\,m$$

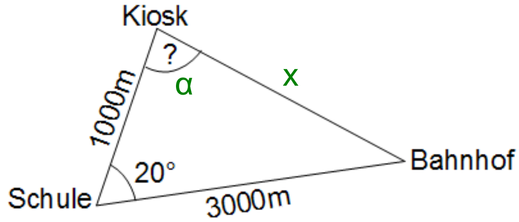
Am Ende der gesamten Strecke ist man tiefer als zu Beginn:
$$h_1-h_2=239{,}5691629\,m-239{,}8082301\,m=-0{,}2390672\,m\approx -23{,}9\,cm$$

b) Bewerte zum Schluss das Ergebnis hinsichtlich der Aussagekraft für die tatsächlichen Verhältnisse bei dem in der Aufgabenstellung angegebenen Straßenverlauf.

Dadurch, dass die Straße bei 10 km Länge nicht überall exakt die gleiche Steigung haben kann und an der höchsten Stelle sicher auch keinen Knick besitzen wird, ist es unsinnig, aus der kleinen Differenz von etwa 24 cm entscheiden zu wollen, ob das Ende der Strecke höher oder tiefer liegt als der Beginn.

6 Johannes und Margarethe wohnen in Geradland, in dem alle Straßen exakt durch (gerade) Strecken zu beschreiben sind. Die beiden sind auf dem Weg von der Schule zum Bahnhof. Johannes möchte aber noch in einem Kiosk etwas kaufen und muss deshalb einen Umweg fahren. Der Straßenverlauf und die Entfernungen sind (nicht maßstabsgerecht) in der Skizze zu sehen.

a) Berechne die Länge des Weges, die Johannes insgesamt von der Schule über den Kiosk bis zum Bahnhof zurücklegen muss.



Da der der gesuchten Seite x gegenüberliegende Winkel und die beiden übrigen Seiten bekannt sind, kann mit dem Kosinussatz x berechnet werden:

$$x^2 = 1000^2 + 3000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 3000 \cdot \cos 20° \approx 4361844 \rightarrow x = \sqrt{4361844} = 2088{,}5$$

Johannes muss insgesamt $1000\,m + 2088{,}5\,m = 3088{,}5\,m$ *zurücklegen. Er macht also einen Umweg von* $3088{,}5\,m - 3000\,m = 88{,}5\,m$ *.*

b) Berechne den Winkel zwischen den beiden Straßen, die Johannes benutzen muss, wenn er auf kürzestem Weg von der Schule über den Kiosk zum Bahnhof fahren will.

Der gesuchte Winkel α lässt sich mit dem Sinussatz ermitteln:

$$\frac{\sin\alpha}{3000} = \frac{\sin 20°}{2088{,}5} \rightarrow \sin\alpha = \frac{3000 \cdot \sin 20°}{2088{,}5} \approx 0{,}49 \rightarrow \alpha = 29{,}4° \;\textit{oder}\; \alpha = 180° - 29{,}4° = 150{,}6°$$

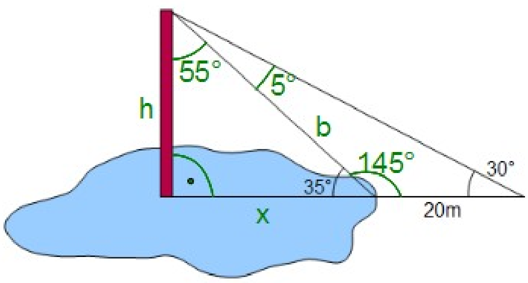
Da der Umweg zum Bahnhof fast so lang wie der direkte Weg ist, muss der Winkel α fast ein gestreckter Winkel sein, also auf alle Fälle ein stumpfer Winkel. Es kommt also nur die Lösung α=150,6° in Frage.

Bei der Berechnung mit dem Kosinussatz erhält man unmittelbar die richtige Lösung:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{1000^2 + 2088{,}5^2 - 3000^2}{2 \cdot 1000 \cdot 2088{,}5} = -0{,}871 \rightarrow \alpha = 150{,}6°$$

Alternative Lösung der Aufgabe 2:

Die grün eingezeichneten Winkel ergeben sich als Ergänzungswinkel zu 180°.



$$\frac{b}{\sin 30°} = \frac{20}{\sin 5°} \rightarrow b = \frac{20 \cdot \sin 30°}{\sin 5°} = 114{,}7$$

$$\cos 35° = \frac{x}{b} \rightarrow x = b \cdot \cos 35° = 114{,}7 \cdot \cos 35° \approx 94$$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!