2011-06-06 Klassenarbeit 4 Klasse 10a Mathematik

Lösung

1 Gib für die Funktionsgleichung $f(x)=(x^2-1)\cdot(2x+5x^3)$ die Gleichung für den Globalverlauf des Graphen mit Begründung an.

Klammern auflösen: $f(x)=(x^2-1)\cdot(2x+5x^3)=2x^3+5x^5-2x-5x^3=5x^5-3x^3-2x$

Der Summand mit dem größten Exponenten gibt das Verhalten des Graphen für betragsmäßig große x an. Die Gleichung für den Globalverlauf ist also $y=5x^5$.

---

2 Gib für die Funktionsgleichung $f(x)=3\cdot(x-5)^2+4$ an, in welchen Intervallen die Funktion fallend und in welchen Intervallen die Funktion wachsend ist.

Der Graph der Funktion ist eine nach oben geöffnete Parabel, die ihren Scheitelpunkt im Punkte (5/4) besitzt. Damit ist die Funktion im Intervall $]-\infty;5]$ *streng monoton fallend und im Intervall* $[5;+\infty[$ *streng monoton wachsend.*

---

3 Die Funktionsgleichung $f(x)=7x^9+4x^{\blacksquare}-2x$ ist gegeben. Man weiß, dass der Graph der Funktion symmetrisch ist. Leider ist die Hochzahl beim mittleren Summanden nicht zu lesen. Es muss dort entweder eine 5 oder eine 6 stehen.

a) Gib mit Begründung an, ob die Kurve punktsymmetrisch zu (0/0) oder achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Da eine ganzrationale Funktion gegeben ist und die zwei bekannten Exponenten ungerade sind, kann es sich nur um eine Punktsymmetrie zum Punkt (0/0) handeln.

b) Gib mit Begründung an, ob die unleserliche Hochzahl eine 5 oder eine 6 ist.

Da bei Punktsymmetrie alle Exponenten ungerade sein müssen, muss der Exponent die 5 sein.

---

4 Eine Funktion ist streng monoton fallend in den Intervallen $]-\infty;-2]$ und $[+3;+\infty[$. Die Funktion ist streng monoton wachsend im Intervall $[-2;+3]$.

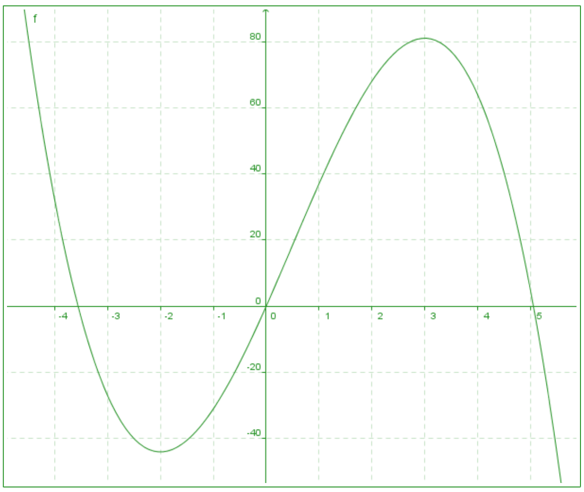
a) Setzte die richtige Zahl ein:

Es gibt mindestens *1* Nullstelle(n) und maximal *3* Nullstelle(n),

bzw. genau *---* Nullstellen.

Es gibt mindestens *---* Extremstelle(n) und maximal *---* Extremstelle(n),

bzw. genau *2* Extremstelle(n).



Beispiel : $f(x)=-2x^3+3x^2+36x$

b) Es gibt *1 bis unendlich viele* Wendepunkt(e).

Wenn es Wendepunkt(e) gibt: Gib das/die Intervall(e) an: *bei 1 Wendepunkt:* $[-2;+3]$

Bei mehr als 1 Wendepunkt können die Wendepunkte in allen Intervallen liegen.

c) Steigt der Funktionsgraph im y-Achsenabschnitt an oder fällt er? *Im Intervall* $[-2;+3]$ *steigt der Graph an*

d) Man untersucht die Koordinaten sämtlicher Punkte des Funktionsgraphen und findet dabei heraus, dass manche y-Werte mehrfach (n-mal) vorkommen. In folgender Tabelle soll für jedes n eingetragen werden, wie viele y-Werte n-mal vorkommen (wenn zum Beispiel 27 verschiedene y-Werte jeweils genau 4-mal vorkommen, muss man in die Tabelle unter 4 die Zahl 27 eintragen). Sind es unendlich viele y-Werte, so schreibt man dafür das Symbol ∞.

n	0	1	2	3	4	5	mehr
Anzahl	0	∞	2	∞	0	0	0

---

5 Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x)=x^3-16{,}75\cdot x+15{,}75$.
Berechne die Nullstellen durch Raten einer Nullstelle und durch Polynomdivision.

Die Nullstelle bei x=1 findet man leicht durch Raten: $f(1)=1^3-16{,}75\cdot 1+15{,}75=0$

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-16{,}75\cdot x+15{,}75):(x-1)=x^2+x-15{,}75 \\
\;x^3-x^2 \\
\text{-----------} \\
\qquad x^2-16{,}75\cdot x+15{,}75 \\
\qquad x^2-x \\
\qquad \text{--------------------------} \\
\qquad\quad -15{,}75\cdot x+15{,}75 \\
\qquad\quad -15{,}75\cdot x+15{,}75 \\
\qquad \text{--------------------------} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

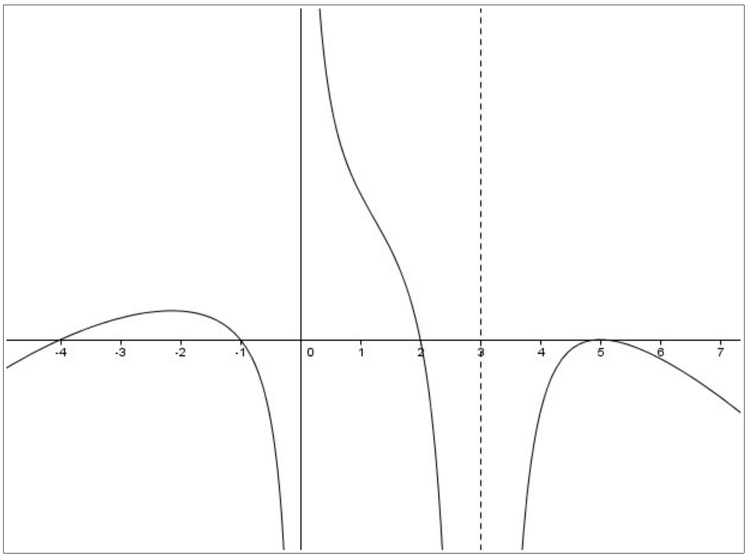
$$\rightarrow\; x_{1,2}=\frac{-1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+15{,}75}=-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+15{,}75}=-0{,}5\pm\sqrt{16{,}00}=-0{,}5\pm 4 \;\rightarrow\; x_1=3{,}5\;\;;x_2=-4{,}5$$

Es gibt also 3 Nullstellen bei $x_1=3{,}5$; $x_2=-4{,}5$; $x_3=1$.

---

6 Rechts ist der Funktionsgraph einer Funktion dargestellt, in deren Funktionsgleichung x sowohl im Zähler als auch im Nenner auftritt.

Gib eine Funktionsgleichung an, deren Graph die besonderen Punkte an den ganzzahligen x-Werten mit dem abgebildeten Graph gemeinsam hat.



Die Funktion besitzt 3 einfache Nullstellen bei $x=-4, x=-1$ *und* $x=2$ *und eine doppelte Nullstelle bei* $x=5$ *.*

Ein einfacher Pol befindet sich bei $x=0$ *und ein zweifacher Pol bei* $x=3$ *.*

Da für $x\to\infty$ *die y-Werte gegen* $-\infty$ *gehen, muss vor den Funktionsterm ein Minuszeichen gesetzt werden.*

Funktionsgleichung: $f(x)=-\dfrac{(x+4)(x+1)(x-2)(x-5)^2}{x\cdot(x-3)^2}$

---

7 Von einer Funktionsgleichung 3. Grades sind folgende Eigenschaften bekannt: Der Graph besitzt einen Hochpunkt bei (3/4); eine Nullstelle liegt bei x=-2; bei x=0 hat der Graph einen Wendepunkt.

Berechne die Funktionsgleichung der Funktion.

Allgemeine Funktionsgleichung und Ableitungen:

$f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$

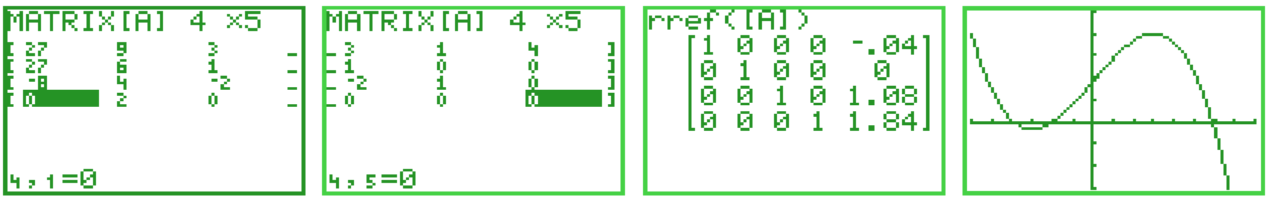
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

Bedingungen:

Hochpunkt bei (3/4):	$f(3)=4 \;\to\; 27a+9b+3c+d=4$
	$f'(3)=0 \;\to\; 27a+6b+c=0$
Nullstelle bei $x=-2$ *:*	$f(-2)=0 \;\to\; -8a+4b-2c+d=0$
Wendepunkt bei $x=0$ *:*	$f''(0)=0 \;\to\; 2b=0$

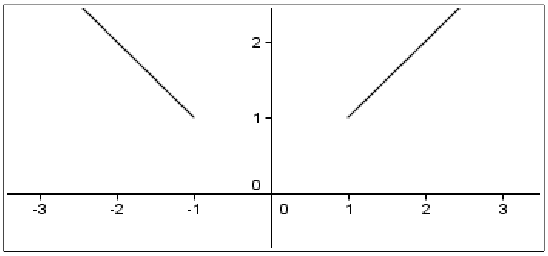
Lösung des Gleichungssystems:



Es ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x)=-0{,}04x^3+1{,}08x+1{,}84=-\dfrac{1}{25}x^3+\dfrac{27}{25}x+\dfrac{46}{25}$ *.*

---

8 Bei einer rechteckigen Tischplatte sollen die Ecken abgerundet werden. Zur Programmierung der CNC-Fräsmaschine muss eine mathematische Funktion eingegeben werden, die die Schnittlinie beschreibt.



Die Kanten des Tisches werden durch zwei Funktionen $f_1(x)=-x$ und $f_2(x)=x$ angegeben. An den Stellen (-1/1) und (1/1) soll die Abrundung beginnen. Der Schnitt soll so verlaufen, dass an den beiden Stellen kein Knick entsteht. Die gesuchte Funktionsgleichung soll vom Typ $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ sein.

1. Ableitungen: $f'(x)=2ax+b \quad ; \quad f_1'(x)=-1 \quad ; \quad f_2'(x)=1$

a) Begründe, warum wir bei dieser Aufgabe (anders als im Unterricht) keine Funktion 3. Grades benötigen.

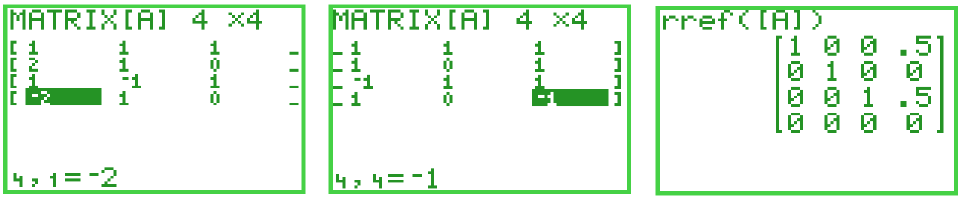
Da die gegebenen Funktionen und die Nahtstellen achsensymmetrisch liegen, reicht es eigentlich, die Bedingungen für nur eine Nahtstelle zu betrachten und zu fordern, dass der Graph auf der y-Achse eine waagrechte Tangente besitzt. Es sind also z.B. folgende 3 Bedingungen aufzustellen, mit denen man die 3 Parameter a, b und c berechnen kann:

$f(1)=1 \rightarrow a+b+c=1$
$f'(1)=1 \rightarrow 2a+b=1$
$f'(0)=0 \rightarrow b=0 \rightarrow 2a+0=1 \rightarrow a=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}+0+c=1 \rightarrow c=\frac{1}{2} \rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{2}$

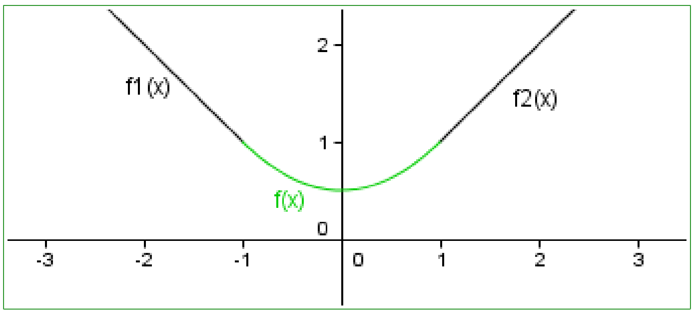
b) Berechne die Werte für a, b und c und gib die Funktionsgleichung an.

Kochrezept-Lösung:

$f(1)=1 \rightarrow a+b+c=1$
$f'(1)=1 \rightarrow 2a+b=1$
$f(-1)=1 \rightarrow a-b+c=1$
$f'(-1)=-1 \rightarrow -2a+b=-1$



Auch so ergibt sich die Lösung $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{2}$.



VIEL ERFOLG BEI DER BEARBEITUNG DER AUFGABEN!