2011-03-21 Klassenarbeit 3 Klasse 10a Mathematik

Lösung

1 Berechne die Ableitungen folgender Funktionen mit Hilfe der gelernten Ableitungsregeln

a) $f_1(x)=3x^2-x \quad \rightarrow f_1'(x)=6x-1$

b) $f_2(x)=5+3\cdot\sqrt{x} \quad \rightarrow f_2'(x)=\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{x}}$

c) $f_3(x)=\sin x-\dfrac{4}{x^3} \quad \rightarrow f_3'(x)=\cos x+\dfrac{12}{x^4}$

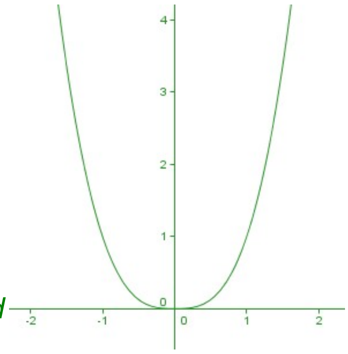
d) $f_4(x)=(2x-9)^5 \quad \rightarrow f_4'(x)=5\cdot(2x-9)^4\cdot 2=10\cdot(2x-9)^4$

---

2 Heaviside-Funktion: $H(x)=\begin{Bmatrix} 0 & \text{für} & x\le 0 \\ 1 & \text{für} & x>0 \end{Bmatrix}$ Signum-Funktion: $sgn(x)=\begin{Bmatrix} -1 & \text{für} & x<0 \\ 0 & \text{für} & x=0 \\ 1 & \text{für} & x>0 \end{Bmatrix}$

Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen und gib mit Begründung an, ob die Funktionen differenzierbar sind oder nicht.

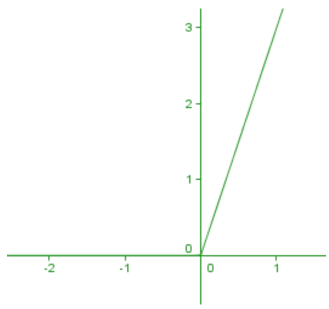
a) $f_5(x)=x^3\cdot sgn(x) \;=\begin{Bmatrix} -x^3 & \text{für} & x<0 \\ 0 & \text{für} & x=0 \\ x^3 & \text{für} & x>0 \end{Bmatrix}$



Für x≠0 ist die Funktion differenzierbar.

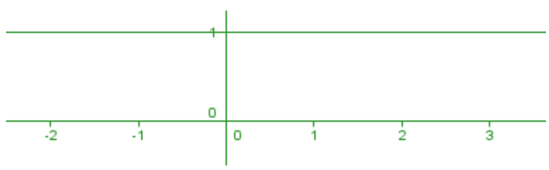
Auch bei x=0 ist sie differenzierbar, weil die Funktionswerte von links und von rechts kommend mit dem Funktionswert bei x=0 übereistimmen und ebenfalls die Steigungen bei x=0 von links und von rechts kommend gleich 0 sind, also übereinstimmen.

b) $f_6(x)=3x\cdot H(x) \;=\begin{Bmatrix} 0 & \text{für} & x\le 0 \\ 3x & \text{für} & x>0 \end{Bmatrix}$



Die Funktion ist nicht differenzierbar, weil bei x=0 ein Knick vorliegt. Dort gibt es keine definierte Steigung. Von links kommend hat die Steigung den Wert 0, von rechts kommend den Wert 3.

c) $f_7(x)=H\left(x^2+3\right) \;=1$



Da das Argument der Heaviside-Funktion für alle x größer als 0 ist, hat die Funktion überall den Funktionswert 1. Die Steigung beträgt überall 0, d.h. die Funktion ist differenzierbar.

3 Bilde die Ableitung von $f(x)=x^2-3x+4$ an der Stelle $x_0=5$ mit Hilfe einer der beiden Formeln $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ oder $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Mit der linken Formel:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(x^2-3x+4)-(x_0^2-3x_0+4)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x^2-x_0^2)-(3x-3x_0)+(4-4)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\cdot(x+x_0)-3\cdot(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x+x_0)-3}{1}=x_0+x_0-3=2\cdot x_0-3 \;\to\; f'(5)=2\cdot 5-3=7$$

Mit der rechten Formel:

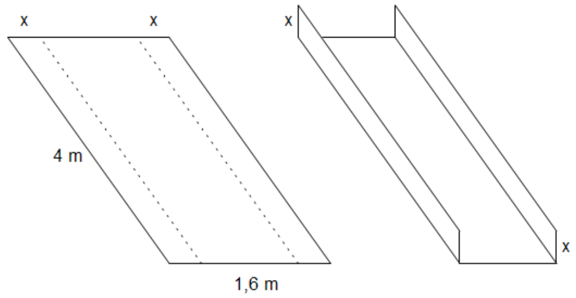
$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{((x_0+h)^2-3\cdot(x_0+h)+4)-(x_0^2-3x_0+4)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2\cdot x_0\cdot h+h^2-3\cdot x_0-3\cdot h+4-x_0^2+3\cdot x_0-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot x_0\cdot h+h^2-3\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}(2\cdot x_0+h-3)=$$

$$2\cdot x_0-3 \;\to\; f'(5)=2\cdot 5-3=7$$

---

4 Aus Kupferblechen der Länge 4m und der Breite 1,6m sollen Regenwasser-Ablaufrinnen für das GFS-Schmetterlingsdach gebaut werden.
Dazu werden auf beiden Seiten die 4m-Seitenkanten um x nach oben umgebogen.
Damit möglichst viel Wasser in kurzer Zeit transportiert werden kann, soll die Querschnittsfläche der Rinne möglichst großen Flächeninhalt besitzen. Berechne für diesen optimalen Fall die Länge der Strecke x und das Volumen, das durch das aufgebogene Blech entsteht.

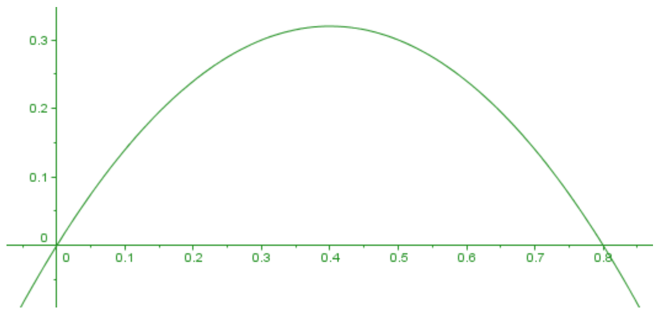


Vergleiche nach Ende der Klassenarbeit die von Dir gefundene Form mit der Ablaufrinne auf dem Dach. Warum ist da ein Unterschied in der Form zu erkennen?

Die Lange Seite wird mit a, die kurze Seite der Bleche mit b bezeichnet. Wird ein Blech auf beiden Seiten um x hochgebogen und damit b verkürzt, so bleibt für die Breite des Bleches noch (b-2x).

Die Querschnittsfläche A ist abhängig von x und berechnet sich aus $A(x)=x\cdot(b-2x)$.

Mit b=1,6m ergibt sich für die Funktion A(x) der rechts abgebildete Graph.



Man findet das Maximum der Funktion, an dem der Graph eine waagrechte Tangente besitzt, indem man die Ableitung der Funktion gleich 0 setzt:

$$A(x)=x\cdot(b-2x)=b\cdot x-2\cdot x^2$$

$$A'(x)=b-4\cdot x \;\overset{A'(x)=0}{\to}\; b-4\cdot x=0 \;\to\; b=4\cdot x \;\to\; x=\frac{b}{4}$$

Mit b=1,6m ergeben sich folgende Werte:

$$x=0{,}4\,m \;;\; A=(1{,}6\cdot 0{,}4-2\cdot 0{,}4^2)\,m^2=(0{,}64-0{,}32)\,m^2=0{,}32\,m^2 \;;$$

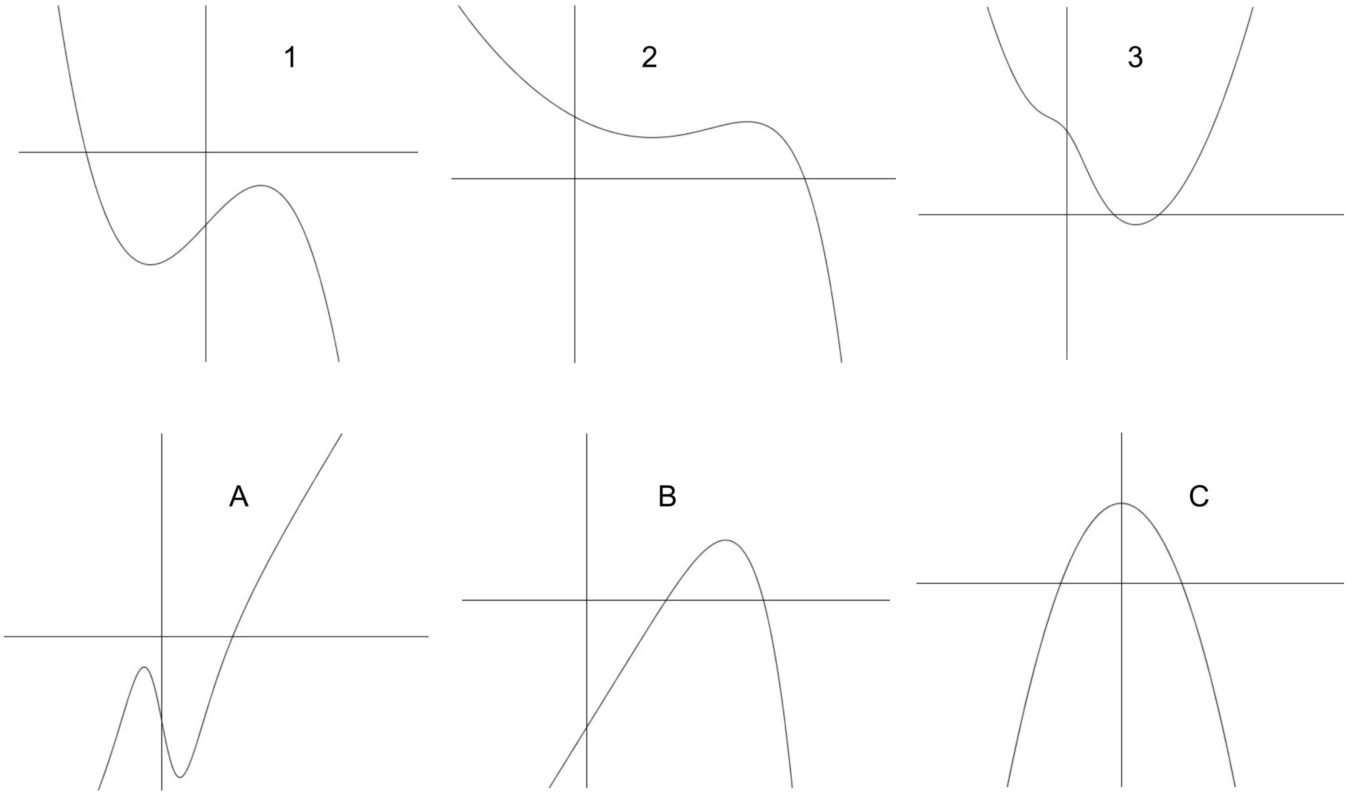
$$V=a\cdot A=4\,m\cdot 0{,}32\,m^2=1{,}28\,m^3$$

Die größte Querschnittsfläche ergibt sich, wenn die Breite b-2x der Rinne doppelt so groß ist wie die Höhe x.

Tatsächlich hat die Regenablaufrinne eher quadratischen Querschnitt. Das liegt daran, dass die beiden Dachhälften des Schmetterlingsdaches nicht beliebig weit voneinander entfernt enden dürfen und ein genügend großer Ablaufquerschnitt benötigt wird. Man verzichtet deshalb auf die mögliche Materialeinsparung.

---

5 Oben stehen mit 1 bis 3 bezeichnet die Graphen dreier Funktionen. Darunter sind mit A bis C bezeichnet die Graphen der Ableitungen dieser Funktionen zu sehen. Ordne die Graphen entsprechend zu und begründe in Worten, warum Du die Zuordnungen so gewählt hast.



Da die Kurven 1 und 2 jeweils 2 Stellen mit waagrechter Tangente besitzen, Kurve 3 jedoch nur eine Stelle mit waagrechter Tangente, muss A die Ableitungskurve von 3 sein, da A nur eine Nullstelle besitzt.

Bei 1 liegen die Stellen mit waagrechter Tangente einmal bei einem negativen und einmal bei einem positiven x-Wert. 2 dagegen hat beide waagrechten Tangenten bei positiven x-Werten. C gehört also zu 1 (Nullstellen bei einem negativen und einem positiven x-Wert) und B gehört zu 2 (beide Nullstellen bei positiven x-Werten).

Also: 1 ↔ C ; 2 ↔ B ; 3 ↔ A

6 Bilde graphisch die Ableitung.
Achte darauf, dass die Ableitungen „besonderer“ Punkte möglichst genau senkrecht unter dem jeweiligen Punkt eingetragen werden (Hilfslinien benutzen!).