2010-12-07 Klassenarbeit 2 Klasse 10a Mathematik

Lösung

1 Zu 4 der angegebenen Gleichungen gehört je ein abgebildeter Graph. Ordne die Buchstaben der Graphen den Nummern der richtigen Gleichungen zu.

(1) $y=(x+2)^{-3}-2$

(2) $y=x^{-3}+2$

(3) $y=2\cdot x^{-3}$

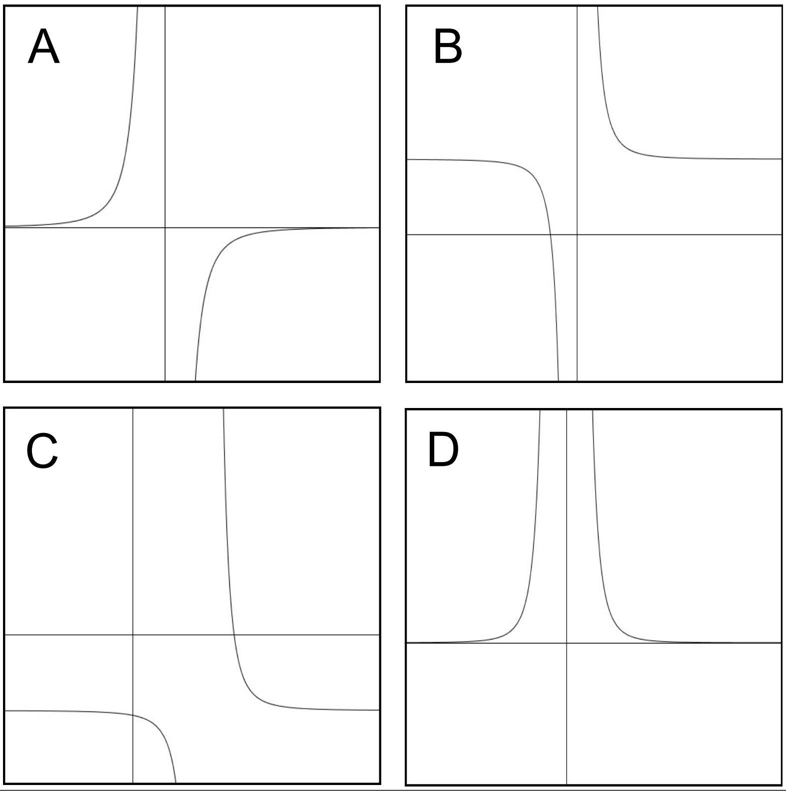
(4) $y=-2\cdot x^{-3}$

(5) $y=2\cdot x^{-4}$

(6) $y=-x^{-2}$

(7) $y=(x-2)^{-3}-2$

(8) $y=2\cdot x^{-3}-2$



A4 B2 C7 D5

---

2 Zeige durch rechnerische Umformungen ohne Nutzung des Taschenrechners, dass folgende Gleichung gilt: $\log_7\frac{5}{6}-\log_7\frac{7}{3}+\log_7\frac{7}{5}=-\log_7 2$

$$\log_7\frac{5}{6}-\log_7\frac{7}{3}+\log_7\frac{7}{5}=\log_7\left(\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{5}}{\frac{7}{3}}\right)=\log_7\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{7}\right)=\log_7\frac{3}{6}=\log_7\frac{1}{2}=\log_7 1-\log_7 2=0-\log_7 2=-\log_7 2$$

---

3 Berechne jeweils den Wert für x in folgenden Gleichungen:

a) $\log_4(5x+1)=1 \;\rightarrow\; 4^1=5x+1 \;\rightarrow\; 5x=4-1=3 \;\rightarrow\; x=\frac{3}{5}$

b) $\log_x\sqrt{6}=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}=6^{\frac{1}{2}} \;\rightarrow\; x=6$

c) $4^x=3\cdot 6^{x+1} \;\rightarrow\; 4^x=3\cdot 6\cdot 6^x \;\rightarrow\; \frac{4^x}{6^x}=3\cdot 6 \;\rightarrow\; \left(\frac{4}{6}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^x=18 \;\rightarrow\; x=\log_{\frac{2}{3}}18\approx-7{,}13$

---

4 Die rekursive Folge a(n) ist gegeben durch $a(0)=1$; $a(n)=3\cdot a(n-1)+4$.

a) Gib die ersten 4 Folgenglieder der Folge an.

$a(0)=1$; $a(1)=3\cdot 1+4=7$; $a(2)=3\cdot 7+4=25$; $a(3)=3\cdot 25+4=79$

b) Es gibt einen Startwert a(0)=... , für den alle Folgenglieder den gleichen Wert haben. Bestimme diesen Startwert und gib Deine Rechnung oder Deine Überlegung an, die Dich zum Ziel geführt hat.

Wenn alle Folgenglieder gleich sein sollen, dann muss auch gelten a(n-1)=a(n).
Einsetzen in die Rekursionsgleichung und Umformung ergibt:

$$a(n)=3\cdot a(n)+4 \;\rightarrow\; -4=3\cdot a(n)-a(n)=2\cdot a(n) \;\rightarrow\; a(n)=-\frac{4}{2}=-2 \;\rightarrow\; a(0)=-2$$

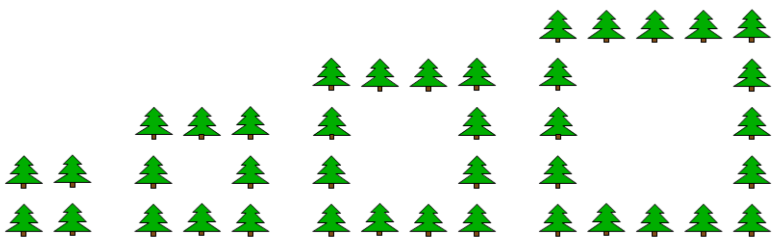
Mir dem Startwert $a(0)=-2$ *ergeben also alle Folgenglieder den Wert -2.*
Probe: $3\cdot(-2)+4=-6+4=-2$.

---

5 In der Abbildung sind Gruppierungen von Weihnachtsbäumen zu sehen.

Die Anzahl der Weihnachtsbäume in jeder Gruppe bildet eine Folge a(n).

Gib für die Folge eine explizite und eine rekursive Darstellung an.



Es gilt: $a(0)=4$; $a(1)=8$; $a(2)=12$; $a(3)=16$

Die rekursive Formel ergibt sich z.B. daraus, dass bei jedem neuen Folgenglied ein Tannenbaum in jeder Kante des Quadrats dazu kommt, insgesamt also 4 Tannenbäume.
Daraus folgt: $a(0)=4$; $a(n)=a(n-1)+4$

Die explizite Formel findet man dadurch, dass die Anzahl der Tannenbäume jeweils ein Vielfaches von 4 sind.
Erster Versuch: $a(n)=4\cdot n$ *. Das geht nicht, weil dann a(0)=0 sein müsste.*
Lösung: $a(n)=4\cdot(n+1)=4\cdot n+4$.
Probe an Hand der rekursiven Gleichung:

$$a(n)\overset{?}{=}a(n-1)+4=(4(n-1)+4)+4=(4n-4+4)+4=4n+4\overset{!}{=}a(n)$$

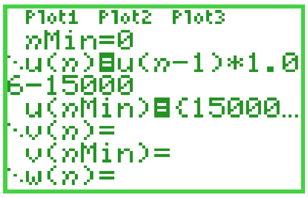
---

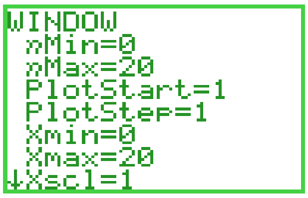
6 Für einen Kredit von 150 000 € zum Hausbau muss man 6% Zinsen jährlich bezahlen. Jedes Jahr werden 15 000 € zurückgezahlt. Nach wie viel Jahren ist das Haus schuldenfrei?

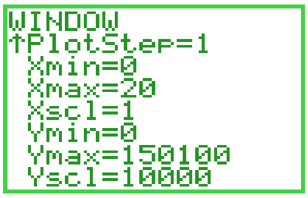
Stelle eine rekursive Formel auf und ermittle mit dem Taschenrechner die Lösung. Gib neben dem Ergebnis auch die rekursive Formel in der Form an, wie Du sie in den Taschenrechner eingegeben hast.

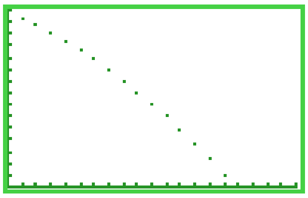
Rekursive Formel: $a(0)=150000$; $a(n)=a(n-1)\cdot 1{,}06-15000$

*Eingabe in den GTR: nMin=0 ; u(n)=u(n-1)*1.06-15000 ; u(nMin)=150000*
Taschenrechner-Screenshots siehe nächste Seite:

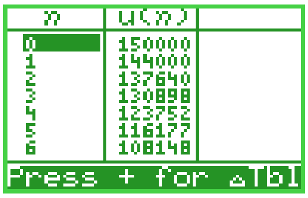


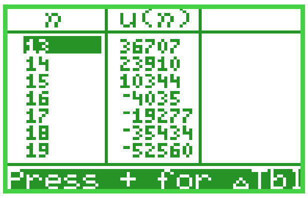






Aus der Tabelle liest man ab, dass nach 16 Jahren das Haus schuldenfrei ist, weil dann der angezeigte Betrag negativ wird.





---

7 In der Zeitung wurden unter der Überschrift „Wachstum der Weltbevölkerung“ in der „Grafik des Tages“ nebenstehende Daten dargestellt.

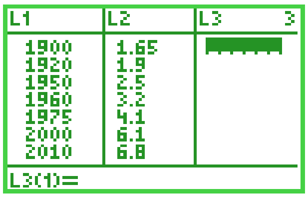
Jahr	Bevölkerung in Milliarden Menschen
1900	1,65
1920	1,9
1950	2,5
1960	3,2
1975	4,1
2000	6,1
2010	6,8

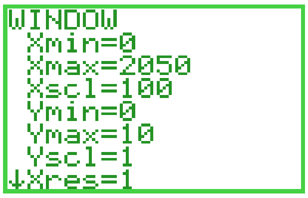
Für das Jahr 2050 wurden 3 Schätzungen notiert:
Höchste Schätzung: 10,5
Mittlere Schätzung: 9,1
Niedrigste Schätzung: 8,0

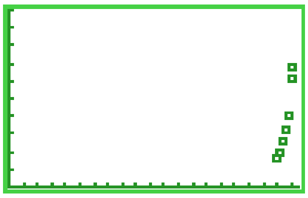
a) Untersuche mit dem Taschenrechner, ob es sich bei dem Wachstum um ein lineares, ein potenzielles oder ein exponenzielles Wachstum handeln könnte. Gib zu jedem Ergebnis eine Begründung an.

Die Tabellenwerte werden mit LinReg auf lineares, mit PwrReg auf potenzielles und mit ExpReg auf exponenzielles Wachstum untersucht.

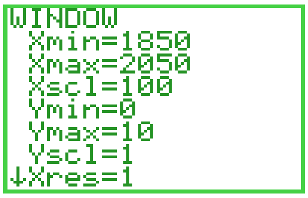
Graphische Darstellung der Tabellenwerte:

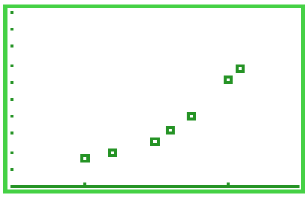


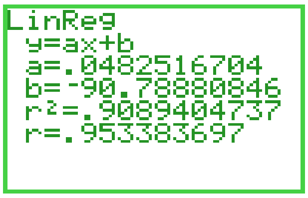


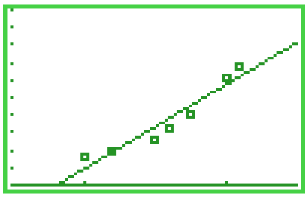


Zoom auf den wichtigen Bereich:

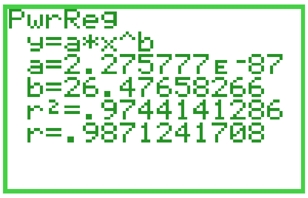


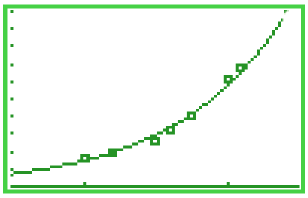


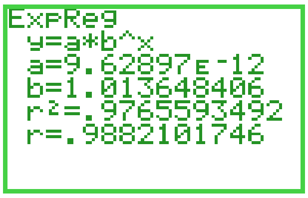


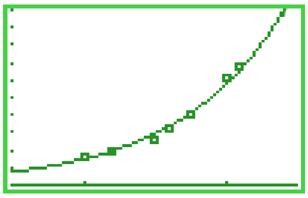


Eine Gerade passt als Näherung nicht, da die Punkte eindeutig auf einer gekrümmten Linie liegen müssen.









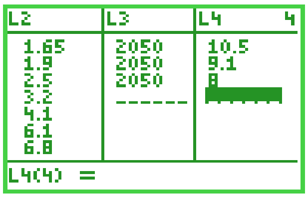
Durch eine Potenzialfunktion und eine Exponenzialfunktion werden die Tabellenwerte etwa gleich gut angenähert.

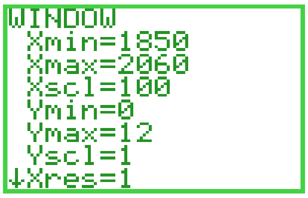
Die Potenzialfunktion verläuft aber durch den Punkt (0/0), d.h. im Jahre 0 unserer Zeitrechnung wären keine Menschen auf der Welt gewesen.Die Exponenzialfunktion hat dagegen für x=0 einen von 0 verschiedenen positiven y-Wert (der hier allerdings nur einen Bruchteil eines Menschen ausmachen würde).

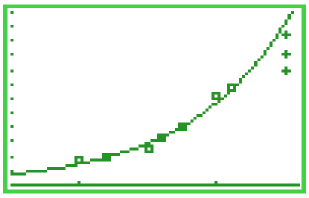
Generell gilt, dass Wachstumsprozesse, bei denen das Wachstum proportional zur vorhandenen Menge ist, gut durch eine Exponenzialfunktion beschrieben wird. Deshalb sollte man sich auch hier für eine Exponenzialfunktion als Näherungsfunktion entscheiden.

b) Untersuche, welche Schätzung am besten zu der von Dir gefundenen Wachstumsart gehört. Unter welchen Bedingungen könnte einer der beiden anderen Werte im Jahr 2050 zutreffen?

Die Schätzwerte werden zusätzlich (mit + als Markierung) eingezeichnet:







Man sieht, dass der größte Schätzwert 10,5 gut zur Näherungskurve passt. Er ist eine sinnvolle Voraussage bei weiterem exponenziellen Anwachsen der Menschheit. Die anderen Schätzwerte könnten angenommen werden, wenn das Wachstum der Menschheit auf irgend eine Weise, z.B. durch eine stärkere Geburtenplanung, gebremst werden könnte.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!