2010-09-14 Klassenarbeit 1 Klasse 10a Mathematik

Lösung

1 Von einer Kugel ist bekannt, dass das Volumen V und die Oberfläche O in den Zahlenwerten übereinstimmen. Berechne den Radius der Kugel.

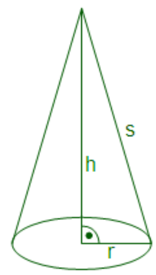
Es gilt $V_{Kugel}=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ *und* $O_{Kugel}=4\cdot\pi\cdot r^2$.

Aus $V_{Kugel}=O_{Kugel}$ *folgt* $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3=4\cdot\pi\cdot r^2 \overset{:4\pi r^2}{\rightarrow} \frac{r}{3}=1 \overset{\cdot 3}{\rightarrow} r=3$.

Der Radius der gesuchten Kugel beträgt also r=3.

---

2 Von einem Kegel sind das Volumen V=16·π und die Höhe h=3 bekannt. Berechne die Größe des Kegelmantels M.



Es gilt $V_{Kegel}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h \rightarrow r=\sqrt{\frac{3\cdot V}{\pi\cdot h}}$ *und* $M_{Kegel}=\pi\cdot r\cdot s$.

Weiter gilt $s=\sqrt{h^2+r^2}$ *(Pythagoras - siehe Skizze).*

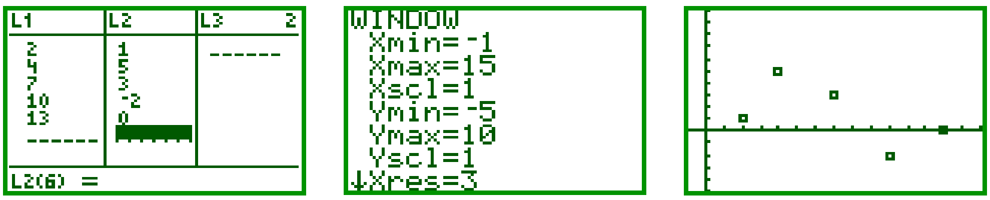
$$M=\pi\cdot r\cdot s=\pi\cdot\sqrt{\frac{3\cdot V}{\pi\cdot h}}\cdot\sqrt{h^2+r^2}=\pi\cdot\sqrt{\frac{3\cdot 16\cdot\pi}{\pi\cdot 3}}\cdot\sqrt{3^2+\frac{3\cdot 16\cdot\pi}{\pi\cdot 3}}=\pi\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{9+16}=\pi\cdot 4\cdot 5=20\cdot\pi$$

Die Mantelfläche beträgt also $M=20\cdot\pi\approx 62{,}8$.

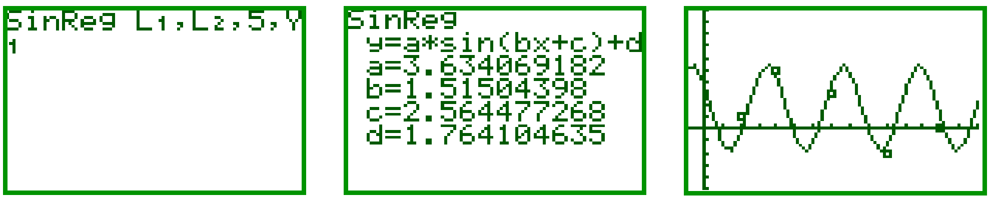
---

3 Gegeben sind die Punkte (2/1), (4/5), (7/3), (10/-2) und (13/0).
Ermittle mit dem Taschenrechner (SinReg) zwei Gleichungen der Form y=a·sin(b·x+c)+d, die sich in der Periodenlänge deutlich unterscheiden und deren Graphen gute Näherungen für die gegebenen Punkte darstellen.

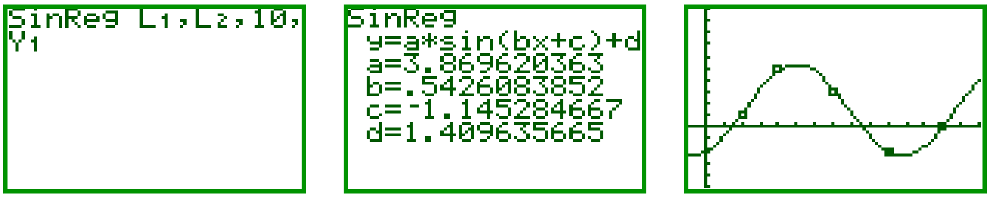
1. Schritt: Koordinaten in Listen eingeben und Punkte zeichnen lassen:



2. Schritt: Regression mit SinReg und Periodenlänge 5:



3. Schritt: Regression mit SinReg und Periodenlänge 10:



Es ergeben sich als Lösungen die Gleichungen
$y_1 = 3{,}63 \cdot \sin(1{,}52 \cdot x + 2{,}56) + 1{,}76$ *und* $y_2 = 3{,}87 \cdot \sin(0{,}54 \cdot x - 1{,}15) + 1{,}41$

---

4 Wandle um ins Bogenmaß:

a) 135° $\rightarrow \frac{135°}{180°} \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot \pi \approx 2{,}36$

b) 330° $\rightarrow \frac{330°}{180°} \cdot \pi = \frac{11}{6} \cdot \pi \approx 5{,}76$

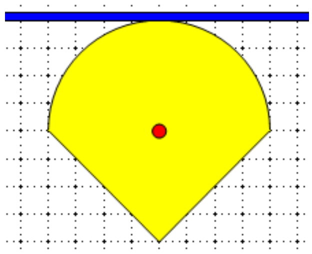
Wandle um ins Winkelmaß:

c) 2,718 $\rightarrow \frac{2{,}718}{\pi} \cdot 180° \approx 155{,}7°$

d) $\frac{2}{3} \cdot \pi$ $\rightarrow \frac{\frac{2}{3} \cdot \pi}{\pi} \cdot 180° = \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$

---

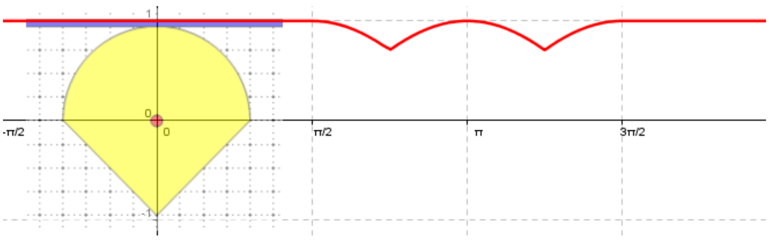
5 Das abgebildete gelbe Flächenstück dreht sich um den roten Punkt. Die oben aufgelegte blaue Platte bleibt immer waagrecht ausgerichtet und wird vom gelben Flächenstück gestützt, kann also nach unten absinken oder nach oben ansteigen.



Zeichne einen Graphen, aus dem man ablesen kann, wie hoch die blaue Platte zu einer bestimmten Zeit gelegen hat.

Der rote Graph zeigt, welche Höhe die blaue Platte bei einem bestimmten Drehwinkel besitzt.

Es ist nur der Graph für eine Umdrehung gezeichnet.



Eine rechnerische Herleitung ist nicht gefordert.
Es reicht eine Zeichnung, die den rot abgebildeten Graph annähert.
Die Funktionsgleichungen für die nach unten gewölbten Kurvenstücke sind

$y_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ *für* $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3}{4} \cdot \pi$; $y_2 = \cos(x - \pi)$ *für* $\frac{3}{4} \cdot \pi \le x \le \frac{5}{4} \cdot \pi$; $y_3 = \cos\left(x - \frac{3}{2} \cdot \pi\right)$ *für* $\frac{5}{4} \cdot \pi \le x \le \frac{3}{2} \cdot \pi$

---

6 Gib alle Winkel zwischen 0° und 360° an, für die gilt

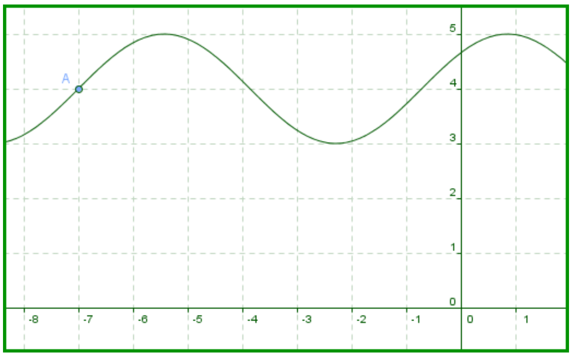
a) $\sin\alpha = -0{,}4$

$\alpha = \arcsin(-0{,}4) \approx -23{,}6° \rightarrow \alpha_1 = 180° + |\alpha| = 203{,}6°$; $\alpha_2 = 360° - |\alpha| = 336{,}4°$

b) $\cos\alpha = 0{,}7$

$\alpha = \arccos(0{,}7) \approx +45{,}6° \rightarrow \alpha_1 = 0° + |\alpha| = 45{,}6°$; $\alpha_2 = 360° - |\alpha| = 314{,}4°$

7 Die Sinuskurve mit der Gleichung $y = \sin x$ soll um 7 in negative x-Richtung und um 4 in positive y-Richtung verschoben werden. Gib die Gleichung der gesuchten Sinusurve an.

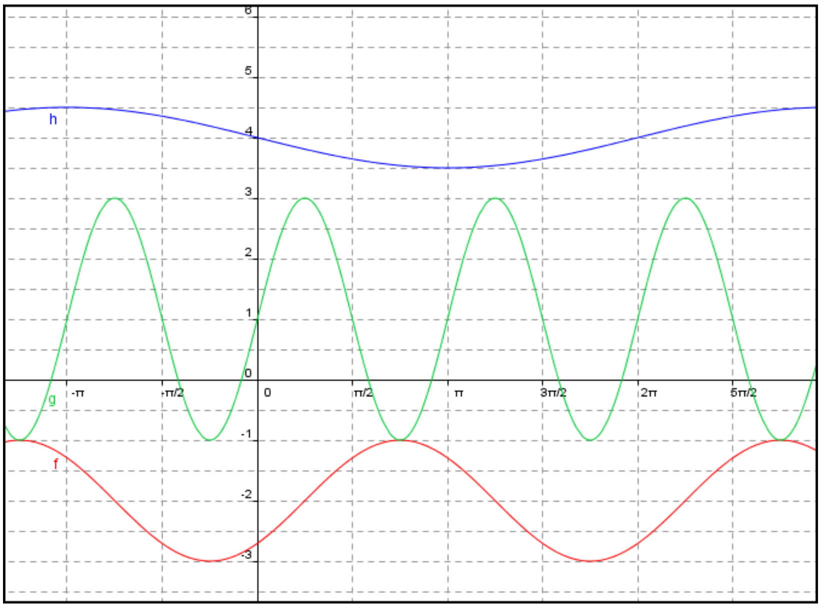


Die gesuchte Gleichung ist $y = \sin(x+7)+4$ *.*

Der Punkt A kennzeichnet den verschobenen Koordinatenursprung.

---

8 Gib die Gleichungen der drei Sinuskurven an.



rote Kurve: $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

grüne Kurve: $g(x) = 2 \cdot \sin(2 \cdot x) + 1$

blaue Kurve:

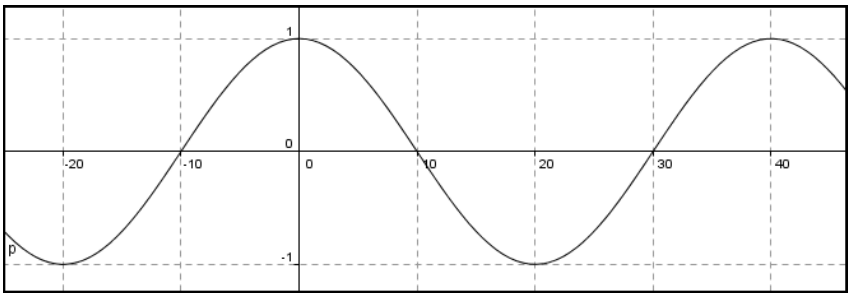
$h(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x - \pi\right) + 4$ *oder*

$h(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot (x - 2 \cdot \pi)\right) + 4$ *oder*

$h(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) + 4$

---

9 Bestimme, um welchen Wert die Kosinuskurve $y = \cos x$ in x-Richtung gestreckt wurde und gib die zum Graphen gehörende Gleichung an.



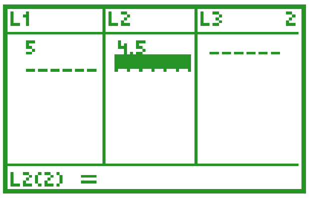
Streckfaktor ist $\frac{\pi}{20}$ *.*

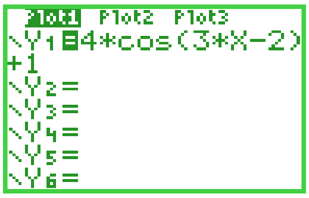
Gleichung: $y = \cos\left(\frac{\pi}{20} \cdot x\right)$

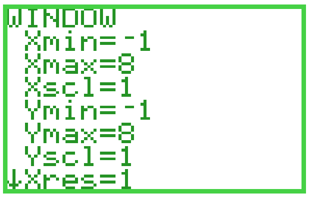
---

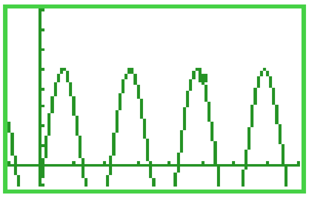
10 Untersuche, ob der Punkt (5/4,5) exakt auf dem Graphen mit der Gleichung $y = 4 \cdot \cos(3x - 2) + 1$ liegt.

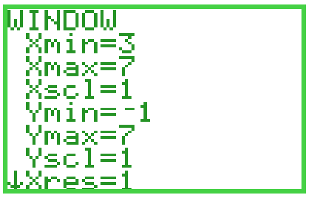
Da gefragt ist, ob der Punkt „exakt“ auf dem Graph liegt, reicht es nicht, den Punkt und den Graphen zeichnen zu lassen und sich auf die Aussage des Bildes zu verlassen:

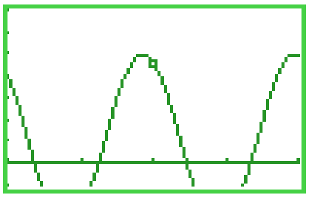




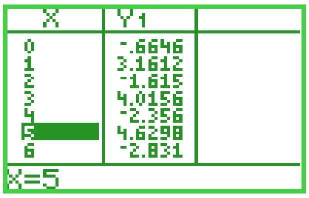




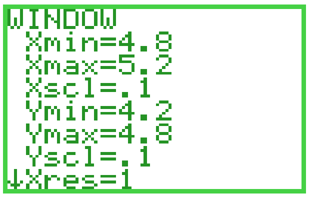


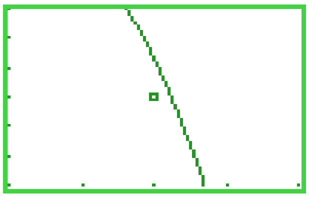


Erst die rechnerische Überprüfung, z.B. mit der TABLE-Funktion, zeigt, dass der Punkt nicht auf dem Graphen liegt, weil an der Stelle x=5 der y-Wert 4,6298 und nicht 4,5 ist.



Möglich wäre natürlich auch ein wesentlich stärkeres Zoomen:





VIEL ERFOLG BEI DER BEARBEITUNG DER AUFGABEN!