Lösung

1 Berechnen Sie das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=$

Substitution: $z=1+e^{-x} \rightarrow \frac{dz}{dx}=-e^{-x} \rightarrow dx=\frac{-1}{e^{-x}}dz$ und $x=0 \rightarrow z=2$; $x=\infty \rightarrow z=1 \rightarrow$

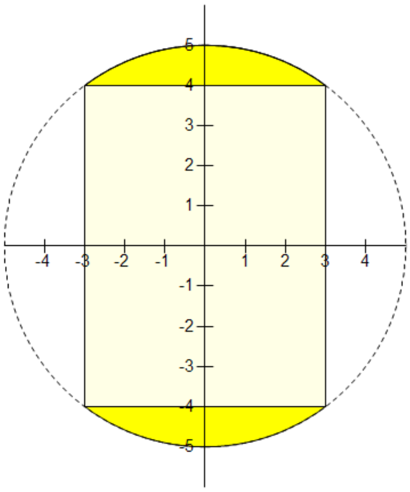
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\int_2^1 \frac{e^{-x}}{z}\cdot\frac{-1}{e^{-x}}dz=-\int_2^1 \frac{1}{z}dz=-[\ln|z|]_2^1=-(\ln 1-\ln 2)=\ln 2\approx 0{,}693$$

---

2 Aus einer Vollkugel aus Holz soll ein Armreif hergestellt werden. Dazu wird mit einem Zentrumsbohrer ein zylinderförmiges Stück aus der Holzkugel herausgesägt. Der außen übrig bleibende Bereich bildet den Armreif.

Berechnen Sie die Masse des Armreifs.
In der Zeichnung befindet sich die Kugelmitte im Koordinatenursprung des Koordinatensystems.
Für den oberen Teil des Kugelumfangs gilt die Beziehung $y=\sqrt{r^2-x^2}$.
Der Radius der Kugel beträgt 5 cm, der Durchmesser des herausgeschnittenen Holzblocks beträgt 8 cm.

Holz hat eine Dichte von $7\frac{g}{cm^3}$.



Das Volumen des Rings erhält man, indem man den oberen gelben Bereich (siehe Skizze) um die x-Achse rotieren lässt. Berechnungsformel: $V_x=\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2dx$.

Zunächst wird das Kugelvolumen im Bereich -3 bis +3 berechnet, dann wird das Volumen des herausgeschnittenen Zylinders (Radius 4, Höhe 6) subtrahiert:

$$V_{Teil-Kugel}=\pi\cdot\int_{-3}^{+3}\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2dx=\pi\cdot\int_{-3}^{+3}25-x^2dx=\pi\cdot\left[25\cdot x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{+3}=\pi\cdot((75-9)-(-75+9))=132\cdot\pi$$

$$V_{Zylinder}=\pi\cdot\int_{-3}^{+3}4^2dx=\pi\cdot\int_{-3}^{+3}16\,dx=\pi\cdot[16\cdot x]_{-3}^{+3}=\pi\cdot(48-(-48))=96\cdot\pi$$

oder einfacher: $V_{Zylinder}=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot 4^2\cdot 6=16\cdot 6\cdot\pi=96\cdot\pi$

Daraus folgt: $V_{Ring}=V_{Teil-Kugel}-V_{Zylinder}=132\cdot\pi-96\cdot\pi=36\cdot\pi\approx 113$

Der Ring hat also ein Volumen von 113 cm³.

Daraus berechnet sich die Masse zu $m=\rho\cdot V=7\frac{g}{cm^3}\cdot 113\,cm^3=791\,g$.

---

3 Eine Funktion mit der Gleichung vom Typ $f_{a,b,c}(x)=\frac{a x^2+b x+a}{x^2-c}$ besitzt eine Polstelle bei x=2, einen y-Achsenabschnitt bei y=4 und eine waagrechte Tangente bei x=4.
Berechnen Sie die Werte für a, b und c und geben Sie die Funktionsgleichung an.

Polstelle bedeutet „Nenner = 0“. Also $x^2-c=0 \overset{x=2}{\rightarrow} 4-c=0 \rightarrow c=4$ *.*

y-Achsenabschnitt bedeutet „f(0) berechnen“.

Also $f(0)=4 \overset{x=0}{\rightarrow} \frac{a}{-c}=4 \rightarrow a=4\cdot(-c)=4\cdot(-4)=-16$ *.*

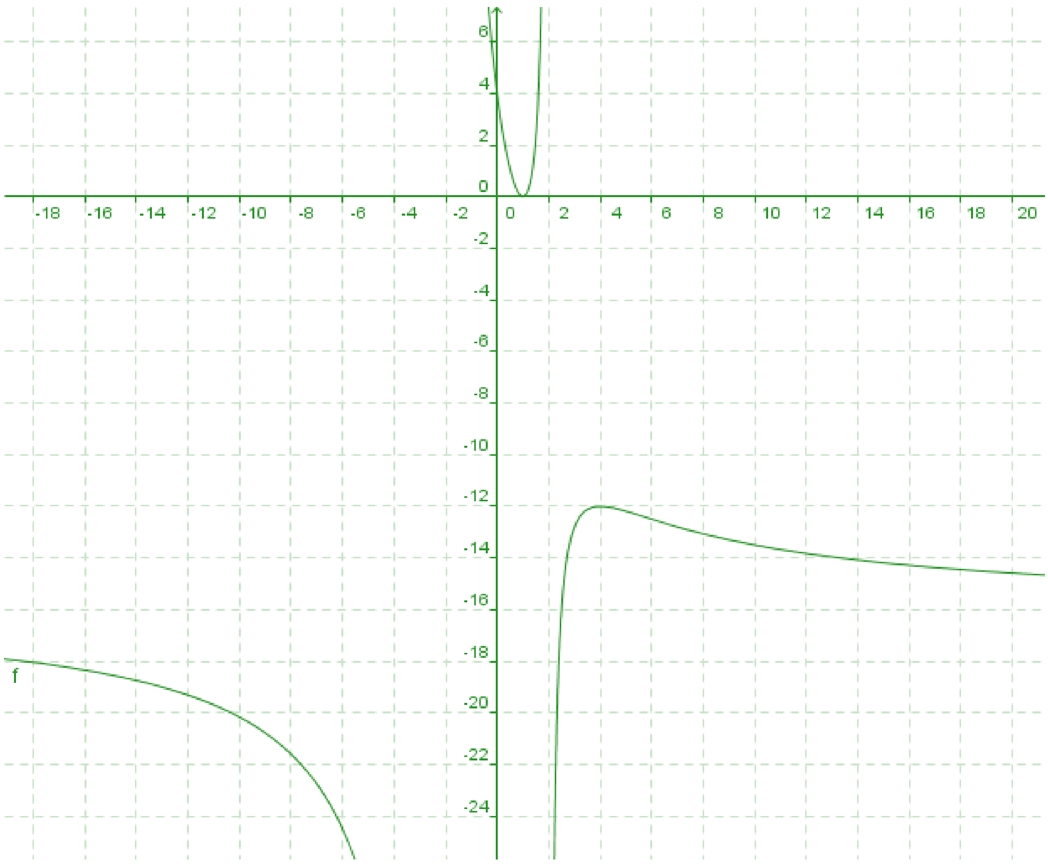
Damit ergibt sich $f_b(x)=\frac{-16\cdot x^2+b\cdot x-16}{x^2-4}$ *und als Ableitung*

$$f_b'(x)=\frac{(-32x+b)\cdot(x^2-4)-(-16x^2+b\cdot x-16)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-32x^3+128x+b\cdot x^2-4b+32x^3-2b\cdot x^2+32x}{(x^2-4)^2}$$

$=\frac{-b\cdot x^2+160x-4b}{(x^2-4)^2}$ *. Waagrechte Tangente bei x=4 bedeutet* $f_b'(4)=0$ *.*

$$f_b'(4)=\frac{-16\cdot b+640-4b}{(16-4)^2}=\frac{640-20\cdot b}{144}\overset{!}{=}0 \rightarrow 640-20\cdot b=0 \rightarrow 20\cdot b=640 \rightarrow b=\frac{640}{20}=32$$

Die gesuchte Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{-16\cdot x^2+32\cdot x-16}{x^2-4}=-16\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2-4}=-16\cdot\frac{(x-1)^2}{(x-2)\cdot(x+2)}$



4 Gegeben ist eine Funktionsschar mit der Gleichung $f_k(x)=\frac{x+k}{k\cdot e^x}$ mit k>0.

4.1 Zeigen Sie, dass $f_k'(x)=\frac{1-x-k}{k\cdot e^x}$.

$$f_k'(x)=\frac{1\cdot k\cdot e^x-(x+k)\cdot k\cdot e^x}{\left(k\cdot e^x\right)^2}=\frac{(1-(x+k))\cdot k\cdot e^x}{\left(k\cdot e^x\right)^2}=\frac{1-x-k}{k\cdot e^x}\quad \text{q.e.d.}$$

4.2 Berechnen Sie die Ortslinie der Extremstellen.

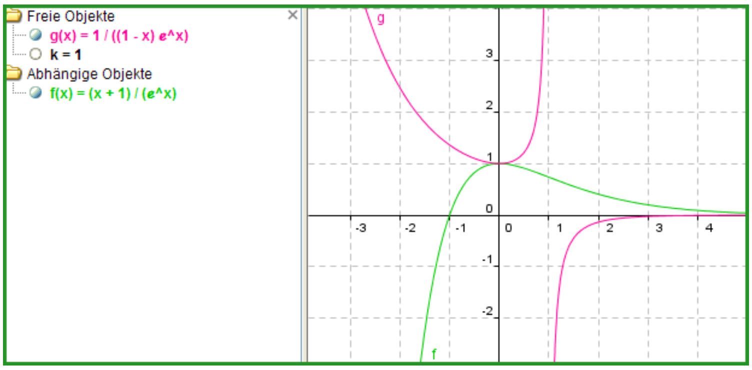
$f_k'(x)=0$ ist die Bedingung für Extremstellen. Daraus folgt $1-x-k=0 \rightarrow x=1-k \rightarrow k=1-x$

Die Ortskurve erhält man durch Einsetzen in die Funktionsgleichung:

$$y=\frac{x+k}{k\cdot e^x}=\frac{x+1-x}{(1-x)\cdot e^x}=\frac{1}{(1-x)\cdot e^x}.$$

In der Abbildung rechts ist der Graph von f(x) grün und die Ortskurve rot dargestellt.

Der k-Wert 1 gehört zur Lösung der Teilaufgabe 4.3



4.3 Berechnen Sie das k>0, für das das lokale Maximum den kleinsten Funktionswert besitzt.

Entweder sucht man (1) ein lokales Minimum der Ortskurve oder aber (2) ein lokales Maximum des y-Wertes der Stellen mit waagrechter Tangente.

zu (1): $y=\frac{1}{(1-x)\cdot e^x} \rightarrow y'=\frac{0-1\cdot\left(-1\cdot e^x+(1-x)\cdot e^x\right)}{(1-x)^2\cdot e^{2x}}=\frac{e^x-e^x+x\cdot e^x}{(1-x)^2\cdot e^{2x}}=\frac{x}{(1-x)^2\cdot e^x}$

Aus y=0 folgt x=0. In der graphischen Darstellung zeigt die rote Kurve, dass bei x=0 ein Minimum vorliegt. Also gilt $k=1-x=1-0=1$.

zu (2): $f_k(1-k)=\frac{1-k+k}{k\cdot e^{1-k}}=\frac{1}{k\cdot e^{1-k}}$.

Dieser Wert wird für das k maximal, für das die Ableitung nach k zu 0 wird:

$$\frac{df}{dk}=\frac{0-1\cdot\left(1\cdot e^{1-k}+k\cdot(-1)\cdot e^{1-k}\right)}{k^2\cdot e^{2\cdot(1-k)}}=\frac{-e^{1-k}+k\cdot e^{1-k}}{k^2\cdot e^{2\cdot(1-k)}}=\frac{-1+k}{k^2\cdot e^{1-k}}\stackrel{!}{=}0 \rightarrow k=1 \rightarrow x=1-k=1-1=0$$

Das lokale Maximum mit dem kleinsten Funktionswert liegt also bei x=0 und wird angenommen, wenn k=1.

4.4 Je 2 Kurven der Schar schneiden sich in einem Punkt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes.

Die beiden Kurven sollen die Parameter a und b haben.

$$f_a(x)=\frac{x+a}{a\cdot e^x}=\frac{x+b}{b\cdot e^x}=f_b(x) \rightarrow \frac{x+a}{a}=\frac{x+b}{b} \rightarrow \frac{x}{a}+\frac{a}{a}=\frac{x}{b}+\frac{b}{b} \rightarrow \frac{x}{a}+1=\frac{x}{b}+1 \rightarrow \frac{x}{a}=\frac{x}{b} \rightarrow$$

$$b\cdot x=a\cdot x \rightarrow b\cdot x-a\cdot x=0 \rightarrow (b-a)\cdot x=0$$

Da $a\neq b$ *, muss x=0 sein.* $f_k(0)=\frac{0+k}{k\cdot e^0}=\frac{k}{k}=1$.

Alle Kurven schneiden sich also unabhängig vom k-Wert im Punkt (0/1).

4.5 Berechnen Sie für k>0 den Flächeninhalt, der von der Kurve und der x-Achse im 1. Quadranten eingeschlossen wird, in Abhängigkeit von k.
Geben Sie mit Begründung an, wie groß dieser Flächeninhalt ist, wenn k gegen Unendlich geht.

Für k>0 liegt die Nullstelle der Kurve im Bereich x<0. Man darf zur Flächenberechnung also von 0 bis ∞ durchintegrieren.

$$\int_0^\infty \frac{x+k}{k\cdot e^x}dx=\int_0^\infty (\underset{u}{x+k})\cdot\underset{v'}{\frac{1}{k\cdot e^x}}dx=\left[(\underset{u}{x+k})\cdot\underset{v}{\frac{(-1)\cdot 1}{k\cdot e^x}}\right]_0^\infty-\int_0^\infty \underset{u'}{1}\cdot\left(\underset{v}{(-1)\cdot\frac{1}{k\cdot e^x}}\right)dx=\left[\frac{-x-k}{k\cdot e^x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{1}{k\cdot e^x}dx=$$

$$\left[\frac{-x-k}{k\cdot e^x}\right]_0^\infty-\left[\frac{1}{k\cdot e^x}\right]_0^\infty=\left[\frac{-x-k-1}{k\cdot e^x}\right]_0^\infty=0-\frac{-k-1}{k\cdot 1}=\frac{k+1}{k}=\frac{k}{k}+\frac{1}{k}=1+\frac{1}{k}$$

Die gesuchte Fläche hat also den Flächeninhalt $A_k=1+\frac{1}{k}$.

Es gilt $\lim_{k\to\infty} A_k=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=1$.

Beim Einsetzen der oberen Integrationsgrenze wurde der Grenzwert mit der Regel von de l'Hospital berechnet:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x-k-1}{k\cdot e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{k\cdot e^x}=0$$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!