Lösung *Version 2009-12-05*

1 Gegeben sind zwei Ebenen E_1 und E_2: $E_1\colon\ 2x_1-3x_2+x_3=6$ $E_2\colon\ \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}=0$

a) Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgerade der beiden Ebenen.

Plan: E_2 wird in die Koordinatenform umgewandelt. Die Gleichungen für E_1 und E_2 bilden ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten. Eine der Unbekannten wird als Parameter λ gewählt.

$$\begin{matrix}E_1\\E_2\end{matrix}\begin{Bmatrix}2x_1-3x_2+x_3=6\\-x_1+3x_2+x_3=0\end{Bmatrix}\overset{x_3=\lambda}{\rightarrow}\begin{Bmatrix}2x_1-3x_2=6-\lambda\\-x_1+3x_2=-\lambda\end{Bmatrix}\overset{+}{\rightarrow}x_1=6-2\lambda\overset{\text{bei } E_2 \text{ einsetzen}}{\rightarrow}-6+2\lambda+3x_2=-\lambda\ \rightarrow$$

$$3x_2=6-3\lambda\ \rightarrow\ x_2=2-\lambda\ \rightarrow\ \text{Schnittgerade}:\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2\lambda\\2-\lambda\\\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

b) Berechne Sie den Winkel, unter dem sich die beiden Ebenen schneiden.

Umwandeln von E_1 in die Normalenform: $E_1:\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}-6=0$

Der Winkel α zwischen den Normalenvektoren von E_1 und E_2 ist der Winkel zwischen den Ebenen:

$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\right|}=\frac{-2-9+1}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+9+1}}=\frac{-10}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}}=\frac{-10}{\sqrt{154}}\ \rightarrow\ \alpha\approx143{,}7°\ \text{bzw.}\ 36{,}3°$$

---

2 Es sind gegeben eine Geradenschar und eine Ebenenschar:

$$g_k\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\k\\2\end{pmatrix}\qquad E_k\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\k\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie rechnerisch, ob es einen k-Wert gibt, bei dem die Gerade parallel zur Ebene verläuft.

Die Gerade läuft dann parallel zur Ebene, wenn der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zum Normalenvektor der Ebene steht.

Berechnung des Normalenvektors: $\begin{pmatrix}-1\\1\\k\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2k\\1\\-2\end{pmatrix}$

Die Vektoren stehen senkrecht, wenn $\begin{pmatrix}1\\k\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-2k\\1\\-2\end{pmatrix}=0\ \rightarrow\ 1-2k+k-4=0\ \rightarrow\ -3=k$

Für $k=-3$ verläuft also die Gerade parallel zur Ebene.

b) Ermitteln Sie rechnerisch, ob es einen k-Wert gibt, bei dem die Gerade senkrecht zur Ebene steht.

Die Gerade verläuft senkrecht zur Ebene, wenn der Richtungsvektor der Geraden parallel zum Normalenvektor der Ebene liegt.

Es muss also gelten: $\begin{pmatrix}1\\k\\2\end{pmatrix}=c\cdot\begin{pmatrix}1-2k\\1\\-2\end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{matrix}1=c-2c\cdot k\\k=c\\2=-2c\end{matrix}\right\}$

Aus der 3. Gleichung folgt $c=-1$ *und damit aus der 2. Gleichung* $k=-1$ *.*
Eingesetzt in die 1. Gleichung ergibt sich $1=-1-2$ *.*
Diese Aussage ist falsch. Also gibt es kein k, so dass die Gerade senkrecht zur Ebene steht.

---

3 Berechnen Sie, für welches k die Ebene E den größten Abstand vom Punkt (0/0/0) hat.

$E:\ \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\k-3\end{pmatrix}-6=0$

In die Hessesche Normalenform wird der Nullvektor eingesetzt. Auf der rechten Seite ergibt sich dann statt 0 der Abstand des Punktes zur Ebene.

HNF:

$$\frac{1}{\sqrt{1+4+(k-3)^2}}\cdot\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\k-3\end{pmatrix}-\frac{6}{\sqrt{1+4+(k-3)^2}}=0 \rightarrow -\frac{6}{\sqrt{5+k^2-6k+9}}=d \rightarrow -\frac{6}{\sqrt{k^2-6k+14}}=d$$

Um das größte d zu finden, wird die Ableitung von d gleich 0 gesetzt:

$$d'=\frac{6}{k^2-6k+14}\cdot(2k-6)\overset{!}{=}0 \rightarrow 2k=6 \rightarrow k=3$$

Da d um so kleiner wird, je größer der Nenner wird (das geschieht für k→+∞ und k→-∞), muss der Wert k=3 zum größten Abstand gehören.

Der größte Abstand hat den Wert $d=\frac{-6}{\sqrt{3^2-6\cdot3+14}}=\frac{-6}{\sqrt{9-18+14}}=\frac{-6}{\sqrt{5}} \rightarrow |d|\approx 2{,}68$ *.*

---

4 a) Die Gleichungen $y=x^2-4x+9$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\lambda^2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ beschreiben denselben Graph. Zeigen Sie, dass diese Aussage richtig ist.

Umformen der 2. Gleichung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\lambda^2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda\\6+2\lambda+\lambda^2\end{pmatrix}$.

Daraus folgt das Gleichungssystem $\left\{\begin{matrix}x=1-\lambda\\y=6+2\lambda+\lambda^2\end{matrix}\right\} \rightarrow \lambda=1-x \rightarrow$

$$y=6+2\cdot(1-x)+(1-x)^2=6+2-2x+1-2x+x^2=x^2-4x+9$$

Der Term stimmt mit dem Term in der 1. Gleichung überein.

b) Beantworten Sie durch Rechnung mit jeder der beiden Darstellungen die Frage, welcher Punkt des Graphen der x-Achse am nächsten liegt.

1. Gleichung: Suche nach einem Extremum, d.h. 1. Ableitung gleich 0 setzen:

$$y=x^2-4x+9 \rightarrow y'=2x-4\overset{!}{=}0 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2\ ;\ y''=2>0 \rightarrow \textit{Minimum}$$

Für den y-Wert ergibt sich durch Einsetzen $y=2^2-4\cdot2+9=4-8+9=5$ *.*

2. Gleichung: Suche nach kleinstem y-Wert. Dazu den Term für y und λ ableiten und gleich 0 setzen.

$$y=6+2\lambda+\lambda^2 \;\rightarrow\; y'=2+2\lambda\overset{!}{=}0 \;\rightarrow\; 2\lambda=-2 \;\rightarrow\; \lambda=-1 \;;\; y''=2>0 \;\rightarrow\; \textit{Minimum}$$

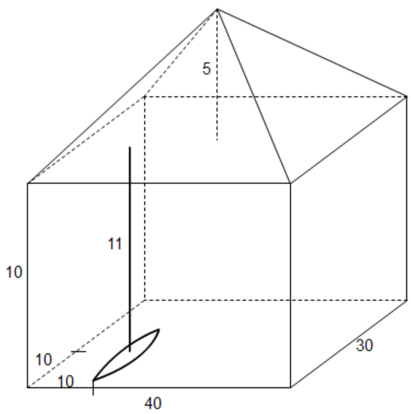
Die Werte für x und y ergeben sich durch Einsetzen von λ in die Geichungen:

$$x=1-\lambda \;\rightarrow\; x=1-(-1)=2 \quad ; \quad y=6+2\lambda+\lambda^2 \;\rightarrow\; y=6+2\cdot(-1)+(-1)^2=6-2+1=5$$

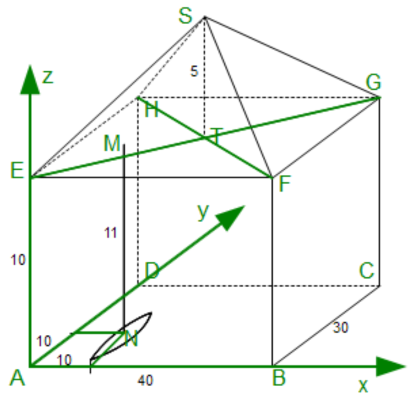
In beiden Fällen ergibt sich also der Punkt (2/5) als derjenige, der der x-Achse am nächsten liegt.

---

5 In einem Museum soll ein Boot mit einem 11 m langen Mast aufgestellt werden. Das Museum ist rechtwinklig gebaut und besitzt als Dach eine regelmäßige Pyramide der Höhe 5 m.
Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht!
Der Mast wird senkrecht 10 m von der vorderen und 10 m von der linken Seitenwand entfernt aufgestellt.
Aus Sicherheitsgründen muss die Mastspitze mindestens 1 m von jeder Dachfläche entfernt bleiben.
Entscheiden Sie durch Rechnung, ob diese Bedingung erfüllt ist.



Zur besseren Übersicht werden einige Hilfslinien eingezeichnet und die Eckpunkte und besonderen Punkte benannt.



Da N näher an AB als an CD und näher an AD als an BC liegt, muss nur der Abstand des Punktes M zu den Dachflächen EFS und ESH untersucht werden.
Der Koordinatenursprung liege im Punkt A.

1) Abstand des Punktes M von der Fläche EFS:

$$A_{EFS}:\; \vec{x}=\overrightarrow{AE}+\lambda\cdot\overrightarrow{EF}+\mu\cdot\overrightarrow{ES}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}40\\0\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}20\\15\\5\end{pmatrix}$$

Normalenvektor: $\begin{pmatrix}40\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}20\\15\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-200\\600\end{pmatrix}$ *oder auch* $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$*, da es nur auf die Richtung und nicht auf die Länge ankommt.*

Normalenform: $A_{EFS}:\; \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}=\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}-30=0$

Hessesche Normalenform: $A_{EFS}:\; \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}-\frac{30}{\sqrt{10}}=0$

Abstand des Punkte M von der Ebene A_{EFS}:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}-\frac{30}{\sqrt{10}}=\frac{0-10+33-30}{\sqrt{10}}=\frac{-7}{\sqrt{10}}=d\approx-2{,}21 \;\rightarrow\; |d|\approx 2{,}21$$

Da der Abstand etwa 2,21 m beträgt, ist die Bedingung „>1 m“ eingehalten worden.

2) Abstand des Punktes M von der Fläche ESH:

$$A_{ESH}:\ \vec{x}=\overrightarrow{AE}+\lambda\cdot\overrightarrow{EH}+\mu\cdot\overrightarrow{ES}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\30\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}20\\15\\5\end{pmatrix}$$

Normalenvektor: $\begin{pmatrix}0\\30\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}20\\15\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}150\\0\\-600\end{pmatrix}$ *oder auch* $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$*, da es nur auf die Richtung und nicht auf die Länge ankommt.*

Normalenform: $A_{ESH}:\ \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}=\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}+40=0$

Hessesche Normalenform: $A_{ESH}:\ -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}-\frac{40}{\sqrt{17}}=0$

Abstand des Punkte M von der Ebene A_{ESH}:

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}-\frac{40}{\sqrt{17}}=\frac{-10+0+44-40}{\sqrt{17}}=\frac{-6}{\sqrt{17}}=d\approx-1{,}46\ \rightarrow\ |d|\approx1{,}46$$

Da der Abstand etwa 1,46 m beträgt, ist die Bedingung „>1 m“ eingehalten worden.

Anmerkung:
Da das Museum in x-Richtung länger als in y-Richtung ist, muss das Dach in x-Richtung flacher ansteigen als in y-Richtung. Da der Mast jeweils 10 m von den Außenwänden entfernt steht, muss er also dem Dach näher kommen, das in x-Richtung geneigt ist.
Mit dieser Überlegung muss dann nur der Fall 2) für die Dachfläche A_{ESH} berechnet werden.

---

6 Zu Weihnachten produziert eine Firma Süßigkeiten, die als Grundstoffe Schokolade und Marzipan enthalten. Aus diesen beiden Grundstoffen werden zunächst 3 verschiedene Zwischenprodukte hergestellt, die dann zu 3 unterschiedlichen Geschenk-Kombinationen zusammengestellt werden.
Die Geschenkkombinationen A, B und C setzten sich folgendermaßen zusammen:
A enthält 3-mal Z1, 4-mal Z2 und 1-mal Z3 als Zwischenprodukte.
B enthält 1-mal Z1, 0-mal Z2 und 1-mal Z3 als Zwischenprodukte.
C enthält 2-mal Z1, 2-mal Z2 und 3-mal Z3 als Zwischenprodukte.
Die Zwischenprodukte setzen sich so aus den Ausgangsstoffen zusammen:
Z1 enthält 5 Teile Schokolade und 3 Teile Marzipan,
Z2 enthält 2 Teile Schokolade und 2 Teile Marzipan und
Z3 enthält 1 Teil Schokolade und 4 Teile Marzipan.

a) Berechnen Sie die Übergangsmatrizen und daraus die Matrix, aus der zu ersehen ist, wieviel Schokolade und wieviel Marzipan die Endprodukte A, B und C jeweils enthalten.

$$\begin{array}{l} \\ \textit{Schokolade}\\ \textit{Marzipan}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}Z1 & Z2 & Z3\end{array}\\ \begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\3 & 2 & 4\end{pmatrix}\end{array}\cdot\begin{array}{c} \\ Z1\\Z2\\Z3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}A & B & C\end{array}\\ \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\4 & 0 & 2\\1 & 1 & 3\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{l} \\ \textit{Schokolade}\\ \textit{Marzipan}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}A & B & C\end{array}\\ \begin{pmatrix}24 & 6 & 17\\21 & 7 & 22\end{pmatrix}\end{array}$$

b) Ein Supermarktunternehmen bestellt eine Großlieferung, wobei in jeder Verpackungseinheit gleich viele Endprodukte A, B und C vorhanden sein sollen. Berechnen Sie, in welchem Verhältnis die Firma die Grundstoffe Schokolade und Marzipan einkaufen muss.

Da man nicht weiß, wie viele Verpackungseinheiten der Supermarkt bestellt, wird für die Anzahl die Variable x gesetzt. Da von allen Endprodukten die gleiche Anzahl geordert wird, schreibt man als Bestellvektor $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$. *Es ergibt sich:*

$$\begin{array}{c} \\ \text{Schokolade} \\ \text{Marzipan} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 24 & 6 & 17 \\ 21 & 7 & 22 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} F \\ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Schokolade} \\ \text{Marzipan} \end{array} \begin{array}{c} F \\ \begin{pmatrix} 47x \\ 50x \end{pmatrix} \end{array}$$

Schokolade und Marzipan müssen also im Verhältnis 47 : 50 bereitgestellt werden.

---

7 In der Gleichung $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ wird die erste Matrix durch die Multiplikation mit einer unbekannten Matrix um 90° im Uhrzeigersinn rotiert.
Berechnen Sie die Werte für a, b, c und d.

Durch Matrizenmultiplikation ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{Bmatrix} 3a+4c=7 \\ 7a+9c=9 \\ 3b+4d=3 \\ 7b+9d=4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} |\cdot 7 \\ |\cdot 3 \\ |\cdot 7 \\ |\cdot 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 21a+28c=49 \\ 21a+27c=27 \\ 21b+28d=21 \\ 21b+27d=12 \end{Bmatrix} \begin{matrix} - \\ \\ - \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} c=22 \rightarrow 3a+88=7 \rightarrow 3a=-81 \rightarrow a=-27 \\ d=9 \rightarrow 3b+36=3 \rightarrow 3b=-33 \rightarrow b=-11 \end{Bmatrix}$$

Für die Drehmatrix ergibt sich in diesem Fall $\begin{pmatrix} -27 & -11 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$.

---

8 Finden Sie durch Rechnung eine 2x2-Matrix, die invers zu sich selbst ist. Diese Matrix soll keine Zahl 0 als Element enthalten.

(Für eine Matrix A und ihre inverse Matrix A^{-1} gilt: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Die gesuchte Matrix sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Dann muss gelten* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \end{Bmatrix}$.

Aus der 2. und der 3. Gleichung ergibt sich durch Ausklammern $b \cdot (a+d) = 0$ *und* $c \cdot (a+d) = 0$. *Einer der Faktoren muss jeweils 0 sein, damit die Gleichung erfüllt ist. b und c dürfen laut Aufgabenstellung nicht 0 sein, also muss gelten a=-d. das passt auch in der 1. und 4. Gleichung. Wenn man a, b und c nun so wählt, dass die 1. Gleichung erfüllt, ist, hat man die Aufgabe gelöst. Einige einfache Beispiele:*

a	2	3	-4
b	3	-2	5
c	-1	4	-3
d	-2	-3	4

---

9 Ein Telefonhersteller will ein neues Produkt auf den Markt bringen und verteilt in einem kleinen Ort zu Testzwecken identische Handys mit verschiedenem Aussehen und Namen. Zu Beginn werden jeweils 1000 Handys mit den Bezeichnungen Afon, Efon und Ofon ausgegeben. Jeweils nach 1 Woche können die Testpersonen das Handy gegen ein anderes dieser Art kostenlos tauschen oder auch das Handy behalten.
Wöchentlich zeigen sich immer wieder folgende Austauschraten:
Vom Afon wechseln 10% zum Efon und 15% zum Ofon.

Vom Efon wechseln 5% zum Ofon und 15% zum Afon.
Vom Ofon wechseln 20% zum Afon und 5% zum Efon.

Stellen Sie die Übergangsmatrix auf und berechnen Sie, wieviele Handys von jeder Sorte nach etwa 1 Jahr ausgegeben sind.

Es fehlt noch die Angabe, wieviel Prozent jeweils bei dem vorhandenen Handy bleiben. Durch Ergänzung auf 100% ergibt sich: Afon - 75% ; Efon - 80% ; Ofon - 75%.

Damit ergibt sich die Übergangsmatrix (von „links“ nach „oben“): $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & \;\;E & \;\;O \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ E \\ O \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}80 & 0{,}05 \\ 0{,}20 & 0{,}05 & 0{,}75 \end{pmatrix} \end{array}$.

Als Start-Zeilen-Vektor ergibt sich $S \;\; \begin{array}{c} \begin{matrix} A & \;\;E & \;\;O \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1000 & 1000 & 1000 \end{pmatrix} \end{array}$.

Ausleihzahlen nach 1 Woche: $\begin{pmatrix} 1000 & 1000 & 1000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}80 & 0{,}05 \\ 0{,}20 & 0{,}05 & 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 & 950 & 950 \end{pmatrix}$

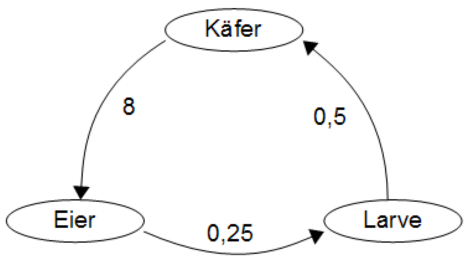
Nach 1 Monat = 4 Wochen: $\begin{pmatrix} 1000 & 1000 & 1000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}80 & 0{,}05 \\ 0{,}20 & 0{,}05 & 0{,}75 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1210 & 882 & 908 \end{pmatrix}$

Nach 1 Jahr = 52 Wochen: $\begin{pmatrix} 1000 & 1000 & 1000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}80 & 0{,}05 \\ 0{,}20 & 0{,}05 & 0{,}75 \end{pmatrix}^{52} = \begin{pmatrix} 1239 & 848 & 913 \end{pmatrix}$

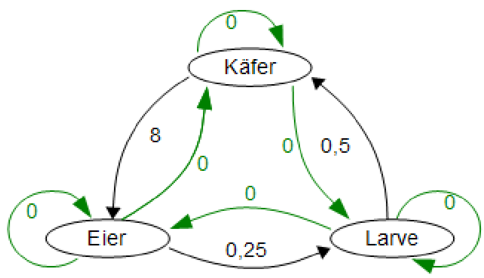
Es stellt sich ein stabiler Zustand ein. Schon ab der 16. Woche ändern sich die (gerundeten) Werte nicht mehr.

---

10 Nebenstehende Grafik zeigt in vereinfachter Form, wie sich eine Population von Käfern entwickelt. In jeweils gleichen Zeitabschnitten legt ein Käfer 8 Eier, von den Eiern werden 1/4 zu Larven und von den Larven die Hälfte zu Käfern. Die Käfer sterben nach der Eiablage, die übrigen Eier und Larven werden gefressen oder sterben. Zu Beginn seien 120 Eier, 60 Larven und 36 Käfer vorhanden. Berechnen Sie über 6 Zeitabschnitte die Entwicklung der Population. Was fällt auf?



Zunächst wird der Übergangsgraph vervollständigt.



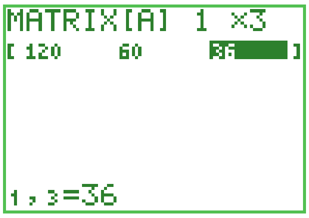
Daraus ergibt sich die Übergangsmatrix $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} E & \;\;L & \;\;K \end{matrix} \\ \begin{matrix} E \\ L \\ K \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$.

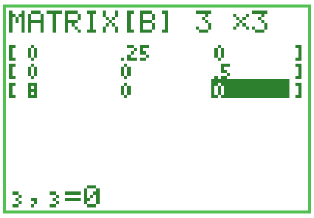
Mit dem Taschenrechner wird nun die gesuchte Populationsentwicklung berechnet.

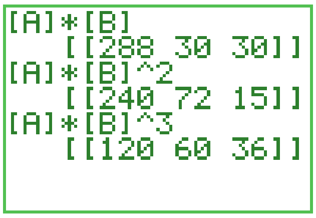
Ausgehend von der Ausgangsmatrix A Start $\begin{array}{c} \begin{matrix} E & \;L & \;K \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 120 & 60 & 36 \end{pmatrix} \end{array}$

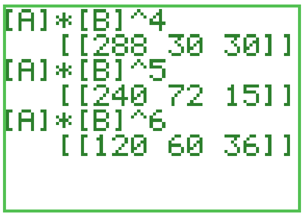
wird jeweils mit der Übergangsmatrix $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ *(n steht für den Zeitabschnitt) das*

Ergebnis mit dem Produkt $A \cdot B^n$ *ermittelt:*









Es fällt auf, dass sich die Werte in den Ergebnismatrizen nach jeweils 3 Zeitabschnitten wiederholen. Die Population der Käfer zeigt also einen zyklischen Verlauf.

Viel Erfolg beim Bearbeiten der Aufgaben!