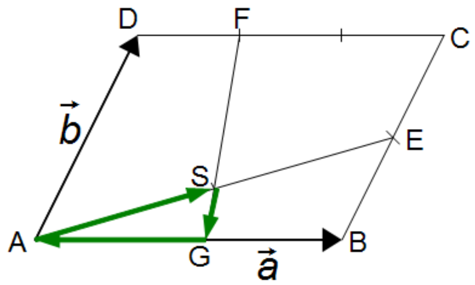
2009-09-29 Klausur 1 Kurs 13Ma1e Mathematik

Lösung

1 Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugen ein Parallelogramm ABCD. Die Strecken AE und BC werden halbiert (Punkte S und E), die Strecke CD wird in 3 gleiche Teile geteilt (der linke Teilungspunkt ist F).
Durch F uns S wird eine Strecke gelegt, die in G auf der Strecke AB endet.



a) Berechnen Sie, in welchem Verhältnis S die Strecke FG teilt.

b) Berechnen Sie, in welchem Verhältnis G die Strecke AB teilt.

Die Vektoren auf dem Streckenzug ASGA haben den Nullvektor als Summe. Mit den Parametern, die zur Beschreibung dieses Streckenzuges benötigt werden, lassen sich die Fragen beantworten.

$$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{SG}=\lambda\cdot\overrightarrow{FG}=\lambda\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot\vec{a}-\vec{b}+\mu\cdot\vec{a}\right)$$

$$\overrightarrow{GA}=-\mu\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GA}=\frac{1}{2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\cdot\lambda\cdot\vec{a}-\lambda\cdot\vec{b}+\lambda\cdot\mu\cdot\vec{a}-\mu\cdot\vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\lambda+\lambda\cdot\mu-\mu\right)+\vec{b}\cdot\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)=\vec{0}$$ *Die Klammern müssen den Wert 0 haben:*

$$\frac{1}{4}-\lambda=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{1}{4}$$

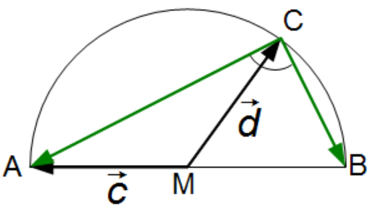
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\mu-\mu=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}\cdot\mu \;\rightarrow\; \frac{5}{12}=\frac{3}{4}\cdot\mu \;\rightarrow\; \mu=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{9}$$

a) S teilt die Strecke AF im Verhältnis 3:1.

b) G teilt die Strecke AB im Verhältnis 5:4.

---

2 In einen Halbkreis ist ein Dreieck eingezeichnet, dessen Seite AB der Durchmesser des Kreises ist.
Der Punkt M ist die Mitte von AB.
Der Vektor $\overrightarrow{MC}$ gibt die Lage des Punktes C auf dem Kreisbogen an.
Zeigen Sie rechnerisch mit Hilfe der eingezeichneten Vektoren, dass der eingezeichnete Winkel bei C ein 90°-Winkel ist, ganz gleich, wo sich der Punkt C auf dem Halbkreis befindet.



$$\overrightarrow{CA}=-\vec{d}+\vec{c} \qquad \overrightarrow{CB}=-\vec{d}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{CA}*\overrightarrow{CB}=\left(-\vec{d}+\vec{c}\right)*\left(-\vec{d}-\vec{c}\right)=d^2-c^2=0$ *, da die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ gleich lang sind.*

Da das Skalarprodukt den Wert 0 hat, stehen die Seiten AC und BC senkrecht zueinander. Da die spezielle Lage von C nicht berücksichtigt wurde, gilt das für alle Punkte C auf dem Halbkreisbogen.

3 Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Punkt P mit den Koordinaten (2/6/-15) auf der Geraden $\vec{x}=\begin{pmatrix}16\\-15\\14\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\-8\end{pmatrix}$ liegt.

Ortsvektor auf der linken Seite der Gleichung einsetzen und λ für alle 3 Komponenten berechnen:

$$\begin{pmatrix}2\\6\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-15\\14\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\-8\end{pmatrix}\rightarrow\left\{\begin{matrix}2=16-4\cdot\lambda_1\\6=-15+6\cdot\lambda_2\\-15=14-8\cdot\lambda_3\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}-14=-4\cdot\lambda_1\\21=6\cdot\lambda_2\\-29=-8\cdot\lambda_3\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}\lambda_1=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}\\\lambda_2=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\\\lambda_3=\frac{29}{8}\end{matrix}\right\}$$

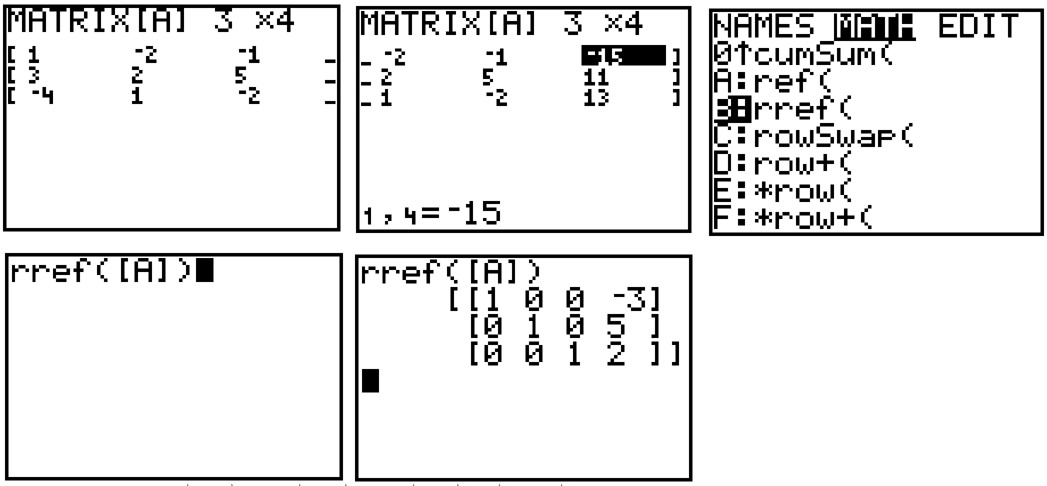
Da die λ-Werte nicht übereinstimmen, liegt der Punkt nicht auf der Geraden.

---

4 Stellen Sie den Vektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}-15\\11\\13\end{pmatrix}$ als Linearkombination $\vec{x}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b}+\nu\cdot\vec{c}$ mit $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}$ dar, d.h. ermitteln Sie die Werte für λ, μ und ν.

Es muss gelten $\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b}+\nu\cdot\vec{c}=\vec{x}$, *also* $\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\11\\13\end{pmatrix}$

Matrix bilden und mit dem Taschenrechner (rref-Befehl) Lösung finden:



Also gilt: $-3\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\11\\13\end{pmatrix}$

---

5 Lösen Sie das Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{r} 2x-y+3z=5 \\ x+2y-z=0 \\ -2x-4y+z=1 \end{array}\right\}$ schriftlich mit dem Gaußschen Verfahren.

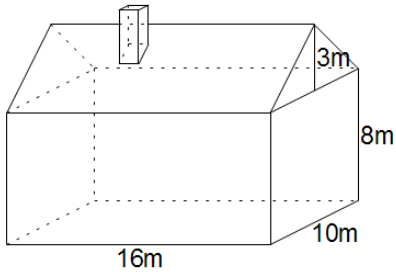
$$\left\{\begin{array}{r} 2x-y+3z=5 \\ x+2y-z=0 \\ -2x-4y+z=1 \end{array}\right\} \overset{I-2\cdot II \text{ und } I+III}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{r} 2x-y+3z=5 \\ -5y+5z=5 \\ -5y+4z=6 \end{array}\right\} \overset{II-III}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{r} 2x-y+3z=5 \\ -5y+5z=5 \\ z=-1 \end{array}\right\}$$

$$z=-1 \overset{II}{\rightarrow} -5y-5=5 \rightarrow -5y=10 \rightarrow y=-2$$

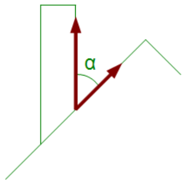
$$z=-1;\, y=-2 \overset{I}{\rightarrow} 2x+2-3=5 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$$

---

6 Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den (kleinsten) Winkel, den der Schornstein mit der Dachfläche einschließt.



Der kleinste Winkel befindet sich zwischen Schornstein und Dachfirst.
Zur Winkelbestimmung werden Vektoren benötigt, die in Richtung des Daches und in Richtung des Schornsteins zeigen.



Dach: $\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$ *Schornstein:* $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ *(x-Achse nach rechts, y-Achse nach hinten, z-Achse nach oben)*

$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{25+9}\cdot 1}=\frac{3}{\sqrt{34}} \rightarrow \alpha\approx 59°$$

---

7 Berechnen Sie die Werte von a, b und c so, dass die beiden Geraden g und h zueinander senkrecht stehen und sich schneiden.

$$g:\ \vec{x}_1=\begin{pmatrix}3\\-9\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}a\\-4\\1\end{pmatrix} \quad h:\ \vec{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\b\\5\end{pmatrix}$$

Die Geraden sind senkrecht, wenn die Richtungsvektoren senkrecht stehen, d.h. das Skalarprodukt der Richtungsvektoren gleich 0 ist.

$$\begin{pmatrix}a\\-4\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-1\\b\\5\end{pmatrix}=-a-4b+5=0 \rightarrow a=5-4b$$

Die Geraden schneiden sich, wenn die Differenz der Stützvektoren (=Orstvektoren) eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren ist:

$$\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\10\\c-3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}5-4b\\-4\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\b\\5\end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} -2=\lambda\cdot(5-4b)-\mu \\ 10=-4\lambda+b\cdot\mu \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\mu=5\lambda-4b\lambda+2 \rightarrow 10=-4\lambda+b\cdot(5\lambda-4b\lambda+2)=-4\lambda+5b\lambda-4b^2\lambda+2b \rightarrow \lambda=\frac{10-2b}{-4+5b-4b^2} \rightarrow$$

$$\mu=\frac{50-10b}{-4+5b-4b^2}-\frac{40b-8b^2}{-4+5b-4b^2}+\frac{-8+10b-8b^2}{-4+5b-4b^2}=\frac{-40b+42}{-4+5b-4b^2}$$

3. Komponente: $c-3=\frac{10-2b}{-4+5b-4b^2}+\frac{-200b+210}{-4+5b-4b^2}=\frac{-202b+220}{-4+5b-4b^2}\rightarrow$

$c=\frac{-202b+220}{-4+5b-4b^2}+\frac{-12+15b-12b^2}{-4+5b-4b^2}=\frac{208-187b-12b^2}{-4+5b-4b^2}$

Diese allgemeine Lösung war nicht gefordert. Es reicht, einen günstigen b-Wert zu wählen und mit diesem weiter zu rechnen:

Wähle z.B. $b=0$ *, dann ergibt sich wegen* $a=5-4b$ *für a:* $a=5$

Zu lösen ist nun noch die Gleichung $\begin{pmatrix}-2\\10\\c-3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$

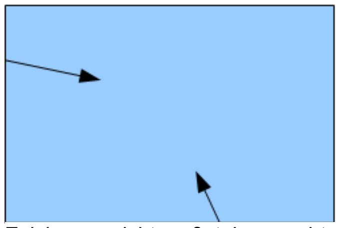
2. Komponente: $10=-4\lambda\ \rightarrow\ \lambda=-\frac{5}{2}$.

Daraus folgt in der 1. Komponente $-2=-\frac{25}{2}-\mu\ \rightarrow\ \mu=2-\frac{25}{2}=-\frac{21}{2}$

3. Komponente: $c-3=-\frac{5}{2}-\frac{105}{2}=-\frac{110}{2}=-55\ \rightarrow\ c=-55+3=-52$

---

8 Bei einem Computerspiel starten 2 Autos von vorgegebenen Stellen auf dem unteren und linken Spielfeldrand.
Man kann die Richtung der Autos durch Pfeilrichtungen und die Beschleunigung der Autos durch die Länge der Pfeile wählen.



Zeichnung nicht maßstabsgerecht

Das Computerprogramm errechnet dann die Gleichungen, die die (geradlinigen) Wege beschreiben, auf denen die Autos eine beschleunigte Bewegung ausführen.

Die Gleichungen sind $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

Die Beschleunigung wird durch das Quadrat beim Zeit-Parameter t erzeugt.

Berechnen Sie, ob die beiden (punktförmigen) Autos zusammenstoßen. Wenn das nicht der Fall ist, berechnen Sie, zu welcher Zeit die Wagen minimalen Abstand besitzen und wie groß dieser minimale Abstand ist.

Wenn bei $\vec{x}_1=\vec{x}_2$ *das t in beiden Komponenten gleich ist, treffen sich die Autos:*

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\vec{x}_2=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}4-t_1^2=0+4t_1^2\\0+2t_2^2=3-t_2^2\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}4=5t_1^2\\3t_2^2=3\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}t_1=\sqrt{\frac{4}{5}}\\t_2=1\end{Bmatrix}$$

Die Autos treffen sich also nicht. Es gelten nur die positiven Lösungen, da die Autos sich nach dem Start erst näher kommen (siehe Skizze).

Minimaler Abstand: Länge L des Vektors $\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ *berechnen:*

$$L=\sqrt{(-4+5t^2)^2+(3-3t^2)^2}=\sqrt{16-40t^2+25t^4+9-18t^2+9t^4}=\sqrt{25-58t^2+34t^4}$$

$L'=0:\ L'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{25-58t^2+34t^4}}\cdot(-116t+136t^3)=0\ \rightarrow\ -116t+136t^3=0\ \rightarrow\ 136t^2=116\ \rightarrow$

$t=\sqrt{\frac{116}{136}}=\sqrt{\frac{29}{34}}$

Auch hier gilt nur der positive Wert, da sich die Autos erst nach dem Start näher kommen.

Einsetzen des t-Wertes in L ergibt den minimalen Abstand:

$$L\left(\sqrt{\frac{29}{34}}\right)=\sqrt{25-58\cdot\frac{29}{34}+34\cdot\left(\frac{29}{34}\right)^2}=\sqrt{\frac{25\cdot 34}{34}-\frac{58\cdot 29}{34}+\frac{29^2}{34}}=\sqrt{\frac{850-1682+841}{34}}=\sqrt{\frac{9}{34}}$$

Die kürzeste Entfernung beträgt also $L=\sqrt{\frac{9}{34}}\approx 0{,}51$.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!