Lösung

1

Bestimme durch schriftliche Rechnung die Lösungsmengen für x.
Dokumentiere den Rechengang und berechne erst ganz zum Schluss mit dem Taschenrechner einen Näherungswert.

a) $x^4=5^3 \rightarrow x=\pm\sqrt[4]{5^3}=\pm\sqrt[4]{125}\approx\pm 3{,}34 \rightarrow \mathbb{L}=\{-3{,}34;+3{,}34\}$

b) $5\cdot(x-4)^3=625 \rightarrow (x-4)^3=125 \rightarrow x-4=\sqrt[3]{125}=5 \rightarrow x=9 \rightarrow \mathbb{L}=\{9\}$

2

Vereinfache so weit wie möglich und schreibe die Ergebnisse ohne negative Hochzahlen, ohne Klammern und ohne Brüche als Hochzahlen:

a) $(3-x)^{-2}=\frac{1}{(3-x)^2}=\frac{1}{9-6x+x^2}$

b) $\sqrt{3^0}\cdot y^0=\sqrt{1}\cdot 1=1$

c) $\sqrt[4]{800\cdot r^3\cdot s^2}\cdot\sqrt[4]{200\cdot r\cdot s^6}=\sqrt[4]{800\cdot r^3\cdot s^2\cdot 200\cdot r\cdot s^6}=\sqrt[4]{160000\cdot r^4\cdot s^8}=20\cdot r\cdot s^2$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{c^2}}=\sqrt{c^{\frac{2}{3}}}=\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{c}$

e) $\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{d}}=\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{d}}=\frac{1}{\sqrt{d}}\cdot\frac{1}{\sqrt{d}}=\frac{1}{d}$

f) $\left(a^{\frac{2}{5}}\cdot b^{-\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}=a^{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}}=a^1\cdot b^{-\frac{1}{2}}=\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}=\frac{a}{\sqrt{b}}$

g) $x^{-2}\cdot x^6+x^2\cdot\left(5x^{-2}-x^2\right)=x^{-2+6}+5\cdot x^{2-2}-x^{2+2}=x^4+5\cdot x^0-x^4=5\cdot 1=5$

3

Die Massen m_e eines Elektrons und m_p eines Protons betragen

$m_e=9{,}109\cdot 10^{-31}\,kg \qquad m_p=1{,}673\cdot 10^{-27}\,kg$.

Berechne (Dezimalzahl mit 1 Nachkommastelle), um das Wievielfache die Masse eines Protons größer ist als die Masse eines Elektrons.

$$\frac{m_p}{m_e}=\frac{1{,}673\cdot 10^{-27}}{9{,}109\cdot 10^{-31}}=\frac{1{,}673}{9{,}109}\cdot 10^{-27-(-31)}=\frac{1{,}673}{9{,}109}\cdot 10^{(-27+31)}=0{,}1837\cdot 10^4=1837$$

Ein Proton hat eine 1837-mal so große Masse wie ein Elektron.

4 Will man bei einem Fernseh-Quiz einen Gewinn mit nach Hause nehmen, so muss man mindestens 5 Fragen und darf maximal 20 Fragen beantworten.
Mit jeder richtig beantworteten Frage steigt der Gewinn.
Nach einer falsch beantworteten Frage wird das Quiz abgebrochen.

Man darf dabei unter 3 Gewinnarten wählen:

1. Zu Beginn erhält man 1000€.
   Mit jeder richtig beantworteten Frage kommen 300€ dazu.
2. Zu Beginn erhält man 1€ auf sein Spielkonto.
   Mit jeder richtig beantworteten Frage verdoppelt sich der Betrag auf dem Konto.
3. Zu Beginn steht der Kontostand bei 0€.
   Mit jeder richtig beantworteten Frage kommen 450€ dazu.

a) Gib mit Begründung an, welches Wachstum in den Fällen 1., 2. und 3. jeweils vorliegt.

Im Fall 1. ist die Differenz zwischen je 2 Gewinnbeträgen gleich. Es liegt also ein lineares Wachstum vor.

Im Fall 2. wird der Gewinnbetrag jeweils mit derselben Zahl multipliziert. Es liegt also ein exponentielles Wachstum vor.

Im Fall 3. ist die Differenz zwischen je 2 Gewinnbeträgen gleich. Es liegt also ein lineares Wachstum vor.

b) Ermittle, für welche Anzahl richtig beantworteter Fragen welches Modell für den Kandidaten am jeweils günstigsten ist.
Dokumentiere dazu den Rechengang und/oder das Vorgehen am Taschenrechner.

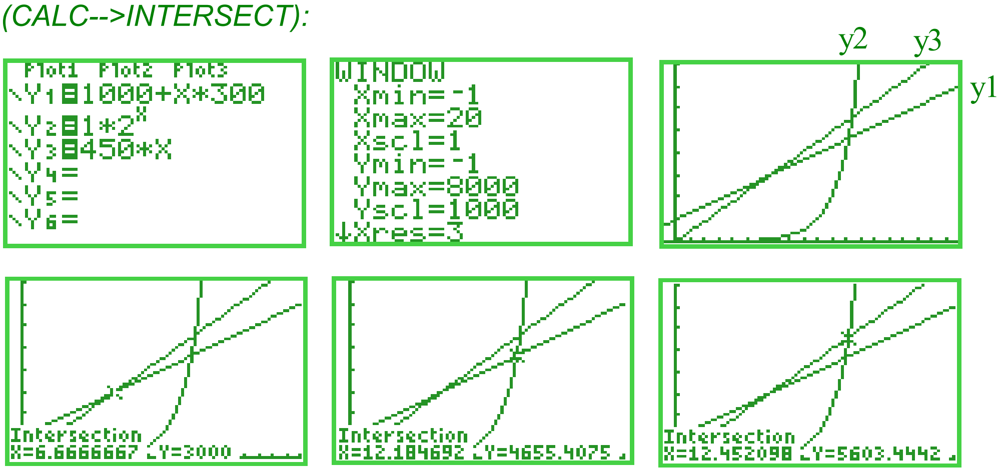
Es werden jeweils Gleichungen aufgestellt, die das Wachstum beschreiben:

zu 1.: $y_1=1000+x\cdot 300$ *(Gerade)*

zu 2.: $y_2=1\cdot 2^x$ *(Exponentialkurve)*

zu 3.: $y_3=450\cdot x$ *(Ursprungsgerade)*

Mit dem Taschenrechner werden die Schnittpunkte von jeweils 2 Kurven bestimmt, z.B. mit (CALC-->INTERSECT):



Bis x=6,67 ist Modell 1 am günstigsten, dann bis 12,45 Modell 3 und anschließend Modell 2.

Da nur ganze Zahlen in Frage kommen, gilt:
Die besten Gewinnchancen hat man
bei 0 bis 6 richtigen Antworten mit Modell 1,
bei 7 bis 12 richtigen Antworten mit Modell 3 und
bei 13 und mehr richtigen Antworten mit Modell 2.

5 In einem Wald, dessen Holzmenge etwa 30000 Festmeter umfasst, stehen die Bäume so, dass sie sich gegenseitig nicht behindern.
Der Holzbestand des Waldes nimmt jährlich um 3,4% zu.

a) Berechne, auf das Wievielfache sich der Holzbestand in 30 Jahren vergrößert hat.

Aufstellen der Wachstumsgleichung:

Bestand zur Zeit 0: 30000.

Wachstumsfaktor: 1,034.

Gleichung: $y = 30000 \cdot 1{,}034^x$ *mit x als Anzahl der Jahre und y als Holzmenge in Festmeter.*

Nach x=30 ergibt sich: $y(30) = 30000 \cdot 1{,}034^{30} \approx 81797 \;\rightarrow\; \frac{81797}{30000} = 2{,}73$

Nach 30 Jahren wird der Holzbestand nach dem Modell 81797 Festmeter betragen.
Er hat sich dabei auf das 2,73-fache vergrößert.

b) Die Faustformel $j = \frac{231}{p} + 1$ gibt an, wieviel Jahre j es dauert, bis sich der Holzbestand des Waldes auf das n-fache vergrößert hat, wenn das Wachstum des Holzbestandes p% beträgt.
Bei einer Verdoppelung wäre n=2, bei einer Verdreifachung n=3 usw.

Berechne mit Hilfe der Angaben in dieser Aufgabe, welchen Wert n bei dieser Faustformel hat.

Mit p=3,4 ergibt sich $j = \frac{231}{3{,}4} + 1 = 68{,}9$.

Setzt man diesen Wert als x in die Formel $y = 30000 \cdot 1{,}034^x$ *ein, so ergibt sich* $y = 30000 \cdot 1{,}034^{68{,}9} = 300321$. *Das ist etwa das 10-fache von 30000.*

Die Formel gibt also an, wann sich ein Bestand bei p Prozent Wachstum verzehnfacht hat (n=10).

Viel Erfolg bei der Beantwortung der Aufgaben!