Lösung

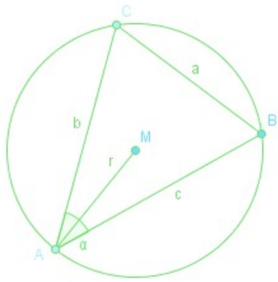
1 Kalle will sich Spaghetti kochen und vertreibt sich die Zeit bis zum Kochen des Wassers, indem er probiert, wie ungekochte Spaghetti-Stangen auf den Teller passen.
Dabei bemerkt er, dass 2 ganze und eine halbe Spaghetti-Stange so zusammen gelegt werden können, dass sie ein Dreieck bilden, wobei die Eckpunkte des Dreiecks auf dem Tellerrand liegen.
Eine ganze Spaghetti-Stange ist 24 cm lang.

Berechne den Durchmesser des Tellers.

Plan:
Die Spaghetti-Figur entspricht einem Dreieck, von dem die Seitenlängen bekannt sind. Berechnet man nun einen Winkel (Kosinussatz), so kann man (mit dem erweitertet Sinussatz) den Radius des Dreieck-Umkreises und damit auch den Durchmesser des Kreises/Tellers bestimmen.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{24^2+24^2-12^2}{2\cdot 24\cdot 24} \underset{24\cdot 24}{=} \frac{1+1-\frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{7}{4}}{2} = \frac{7}{8} \rightarrow \alpha \approx 29°$$

$$2\cdot r = \frac{a}{\sin\alpha} \rightarrow r = \frac{a}{2\cdot\sin\alpha} \approx \frac{12}{2\cdot 0{,}48} = 12{,}5 \rightarrow d \approx 25 \text{ (genauer: 24,787...)}$$

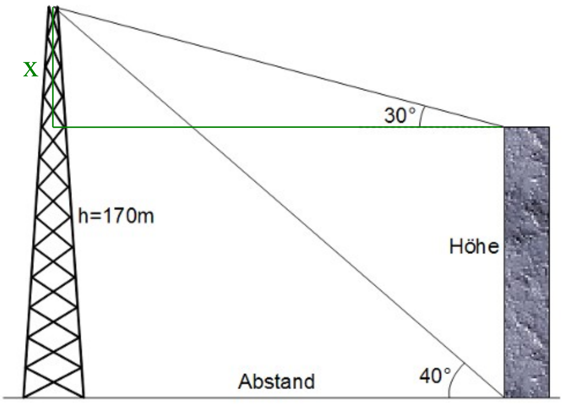


Der Teller hat also einen Durchmesser von etwa 25 cm.

---

2 Die Informationstafel an einem Funkturm gibt die Höhe des Turms mit 170 m an.
In der Nähe des Funkturms gibt es einen Aussichtsturm. Peilt man vom Fuß und von der Plattform des Aussichtsturms die Spitze des Funkturms an, so erhält man die Steigungswinkel 40° und 30°(siehe Zeichnung).

Berechne, wie weit der Funkturm vom Aussichtsturm entfernt ist und wie hoch der Aussichtsturm ist.



Plan:
Aus dem Winkel 40° und der Höhe h=170 m ergibt sich der Abstand der Türme.
Mit diesem Abstand und dem Winkel 30° kann man berechnen, um wie viel Meter (x) der Funkturm höher ist als der Aussichtsturm. Aus diesem Ergebnis folgt die Höhe des Aussichtsturms.

$$\tan 40° = \frac{h}{Abstand} \rightarrow Abstand = \frac{h}{\tan 40°} = \frac{170}{\tan 40°} \approx 202{,}6$$

$$\tan 30° = \frac{x}{Abstand} \rightarrow x = Abstand\cdot\tan 30° \approx 202{,}6\cdot\tan 30° \approx 117{,}0$$

Die Türme haben einen Abstand von etwa 203 m und
der Aussichtsturm ist etwa 170 m - 117 m = 53 m hoch.

---

3 Berechne alle Lösungen für die Winkel α, β, und γ zwischen 0° und 360°, für die gilt

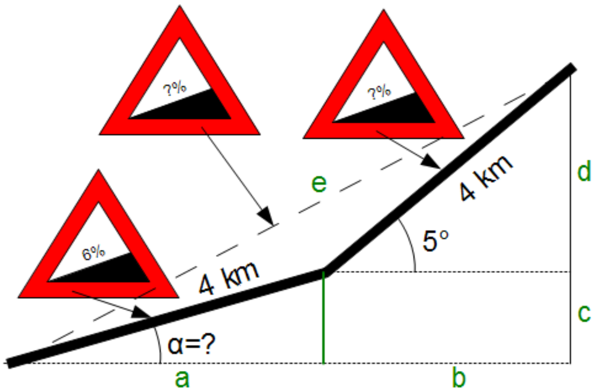
a) sin α = -0,5 $\alpha_1 = -30° = 330°$; $\alpha_2 = 180° - 330° = -150° = 210°$

b) cos β = -0,5 $\beta_1 = 120°$; $\beta_2 = -120° = 240°$

c) tan γ = -0,5 $\gamma_1 = -26{,}6° = 333{,}4°$; $\gamma_2 = 333{,}4° - 180° = 153{,}4°$

---

4 Zu Beginn einer Steigungsstrecke steht ein Warnschild mit der Aufschrift 6%. Nach einem 4 km langen Straßenverlauf mit konstanter Steigung wechselt der Steigungswinkel zu 5° und es geht noch einmal 4 km mit konstanter Steigung weiter.



a) Berechne den Steigungswinkel α der ersten Steigungsstrecke.

b) Berechne, um wie viel Prozent die Straße im 2. Teil ansteigt.

c) Berechne den bei den Steigungsstrecken insgesamt erreichten Höhenunterschied h.

d) Berechne, wie viel Prozent der Anstieg betragen würde, wenn die Straße vom Anfangs- bis zum Endpunkt konstant ansteigen würde.

zu a): $\tan\alpha = \frac{c}{a} = 6\% = \frac{6}{100} \rightarrow \alpha \approx 3{,}43°$ *Die Straße steigt mit dem Steigungswinkel 3,4° an.*

zu b): $\tan 5° = 0{,}087 = 8{,}7\%$ *Im 2. Abschnitt hat die Straße 8,7% Steigung.*

zu c): $\sin 5° = \frac{d}{4000} \rightarrow d = 4000 \cdot \sin 5° \approx 348{,}6$ $\sin\alpha = \frac{c}{4000} \rightarrow c = 4000 \cdot \sin\alpha \approx 239{,}3$

Die gesamte erreichte Höhe beträgt also $d + c = 348{,}6\,m + 239{,}3\,m = 587{,}9\,m$

zu d): $\cos 5° = \frac{b}{4000} \rightarrow b = 4000 \cdot \cos 5° \approx 3984{,}8$ $\cos\alpha = \frac{a}{4000} \rightarrow a = 4000 \cdot \cos\alpha \approx 3992{,}8$

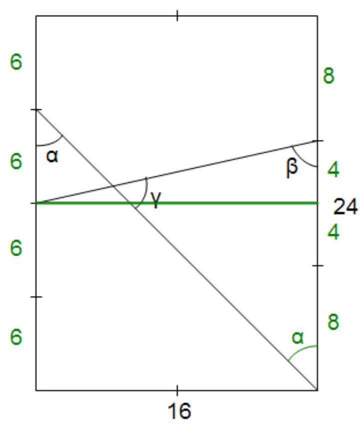
$\frac{c+d}{a+b} = \frac{239{,}3 + 348{,}6}{3992{,}8 + 3984{,}8} = \frac{587{,}9}{7977{,}6} \approx 0{,}074$ *Die mittlere Steigung beträgt also etwa 7,4%.*

---

5 Im Rechteck mit den Seitenlängen 16 und 24 wurden die obere und die untere Seite halbiert. Die linke Seite wurde in 4 gleich große Abschnitte und die rechte Seite in 3 gleich große Abschnitte geteilt.

Berechne die Größe der Winkel α, β und γ.

Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht!

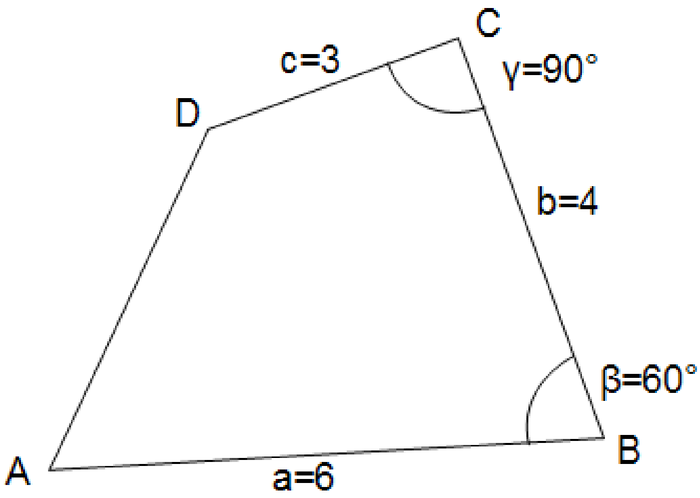


Aus der Zeichnung liest man mit Hilfe der Einzeichnungen ab:

$\tan\alpha = \frac{16}{18} = \frac{8}{9} \rightarrow \alpha \approx 41{,}6°$; $\tan\beta = \frac{16}{4} = 4 \rightarrow \beta \approx 76{,}0°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 41{,}6° - 76{,}0° = 62{,}4°$

6 Berechne den Flächeninhalt des Vierecks.
Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht!



Plan:
1. A1 berechnen (rechtwinkliges Dreieck)
2. f mit Satz des Pythagoras berechnen
3. β1 mit Tangens berechnen
4. β2 aus β und β1 berechnen
5. A2 mit Hilfe von β2, f und a berechnen
6. A=A1+A2

zu 1:

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$$

zu 2:

$$f=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

zu 3:

$$\tan\beta_1=\frac{c}{b}=\frac{3}{4}\ \rightarrow\ \beta_1\approx 36{,}9\,°$$

zu 4:

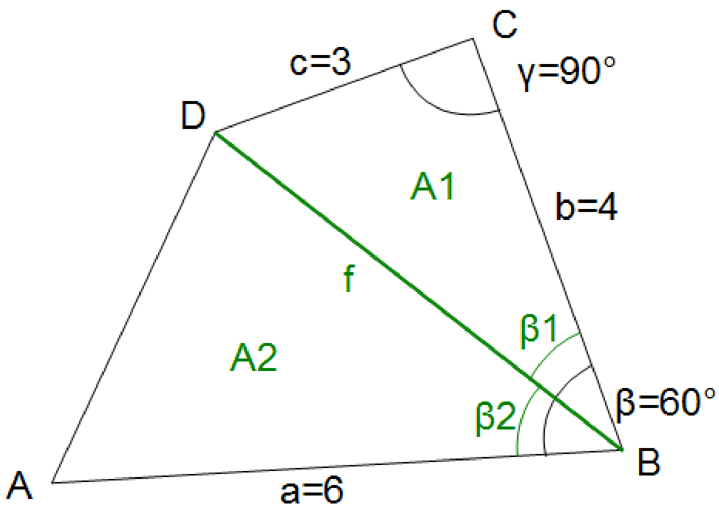
$$\beta_2=\beta-\beta_1=60\,°-36{,}9\,°=23{,}1\,°$$

zu 5:

$$A_2=\frac{1}{2}\cdot a\cdot f\cdot\sin\beta_2=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\sin 23{,}1\,°\approx 5{,}89$$

zu 6:

$$A=A_1+A_2=6{,}00+5{,}89=11{,}89$$



Folgende Formeln dürfen ohne Herleitung benutzt werden.
Alle anderen für die Rechnungen benutzten Formeln müssen hergeleitet werden.

$$\sin\alpha=\frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}}\ ;\ \cos\alpha=\frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}}\ ;\ \tan\alpha=\frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ;\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin\alpha=\sin(180\,°-\alpha)\ ;\ \cos\alpha=\cos(-\alpha)=\cos(360\,°-\alpha)\ ;\ \tan\alpha=\tan(\alpha+180\,°)=\tan(\alpha-180\,°)$$

$$\textit{Sinussatz (r ist Umkreisradius)}:\ \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot r$$

$$\textit{Flächeninhalt A eines Dreiecks}:\ A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$$

Kosinussatz:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

Umformungen des Kosinussatzes zur Berechnung der Winkel:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}$$
$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}$$
$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}$$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!