Lösung

1 Gib alle Lösungen für die Winkel α, β und γ im Bereich zwischen 0° und 360° an, für die gilt

a) sinα=0,7 $44{,}4°\ ;\ 135{,}6°$

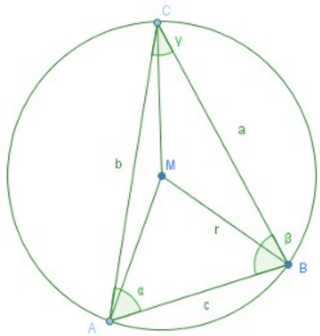
b) cosβ=0,7 $45{,}6°\ ;\ 314{,}4°$

c) tanγ=0,7 $35{,}0°\ ;\ 215{,}0°$

---

2 Drei Orte A-Stadt, B-Dorf und C-Heim wollen gemeinsam eine Notrufzentrale einrichten, deren gemeinsamer Sender von allen 3 Orten gleich weit entfernt aufgestellt werden soll. Die Entfernungen der Orte voneinander: AB=20km, BC=50km und AC=40km.

Berechne, wie weit der Sender von jedem Ort entfernt steht.



Planfigur, nicht maßstabsgerecht
a=BC=50km ; b=AC=40km ; c=AB=20km

Gesucht ist der Radius des Umkreises zum Kreis durch die 3 Punkte A, B und C. Der Radius lässt sich z.B. mit dem erweiterten Sinussatz $2r=\frac{a}{\sin\alpha}$ *berechnen. Dazu wird aber noch der Winkel α benötigt, der sich aus dem Kosinussatz (* $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ *) ergibt.*

Umformung des Kosinussatzes und Einsetzen der Werte:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{40^2+20^2-50^2}{2\cdot 40\cdot 20}=\frac{1600+400-2500}{1600}=-\frac{500}{1600}=-\frac{5}{16}$$

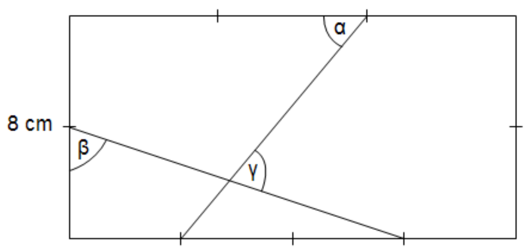
Daraus ergibt sich α=108,2°.

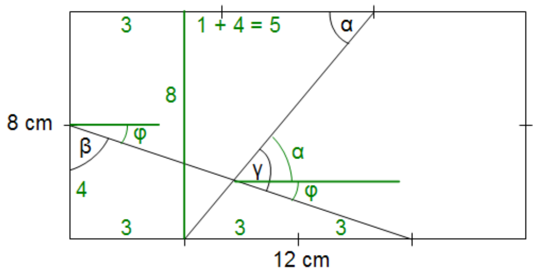
Einsetzen in den Sinussatz: $2r=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{50}{\sin 108{,}2°}\approx 52{,}6\ \rightarrow\ r\approx 26{,}3$

Der Sender steht also etwas mehr als 26 km von jedem Ort entfernt.

---

3 Berechne die Größe der Winkel α, β und γ.
Im Rechteck sind die linke und die rechte Seite halbiert, die obere Seite in 3 gleich lange Abschnitte und die untere Seite in 4 gleich lange Abschnitte aufgeteilt.
Die Skizze ist nicht maßstabsgerecht!





In der Skizze werden Hilfslinien eingezeichnet und Streckenlängen benannt.
Daraus ergibt sich:

$$\tan\alpha=\frac{8}{5}\ \rightarrow\ \alpha=58°$$

$$\tan\beta=\frac{9}{4}\ \rightarrow\ \beta=66°\ \rightarrow\ \varphi=90°-\beta=90°-66°=24°$$

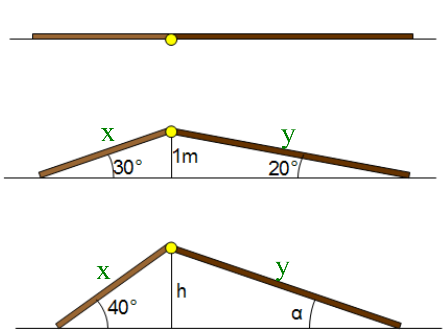
$$\gamma=\alpha+\varphi=58°+24°=82°$$

Die gesuchten Winkel haben folgende Größen: α=58° ; β=66° ; γ=82°.

4 Zwei Balken unterschiedlicher Länge, die zur Dachkonstruktion einer Holzhütte gehören, sind an ihren Enden durch ein Scharnier verbunden und werden an diesem Scharnier durch einen Kran angehoben.

In dem Augenblick, als das Scharnier die Höhe 1m erreicht hat, besitzt der linke Balken den Winkel 30° zum Boden und der rechte Balken den Winkel 20°.

Berechne die Höhe h des Scharniers und den Winkel α, den der rechte Balken zum Boden besitzt, wenn der linke Winkel 40° misst.



Lösungsidee:
Aus den Angaben der mittleren Zeichung kann man die Längen der Balken berechnen, daraus aus der unteren Gleichung h und dann α.

$$\sin 30° = \frac{1m}{x} \rightarrow x = \frac{1m}{\sin 30°} = \frac{1m}{\frac{1}{2}} = 2m \qquad \sin 20° = \frac{1m}{y} \rightarrow y = \frac{1m}{\sin 20°} = \frac{1m}{0{,}342} = 2{,}92m$$

$$\sin 40° = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \sin 40° = 2m \cdot \sin 40° = 1{,}29m \qquad \sin\alpha = \frac{h}{y} = \frac{1{,}29m}{2{,}92m} = 0{,}44 \rightarrow \alpha = 26°$$

Rechnet man ohne Zwischenergebnisse (also nur mit den gegebenen Größen), sieht man eine besondere Gesetzmäßigkeit:

$$x = \frac{1m}{\sin 30°} \;;\; y = \frac{1m}{\sin 20°} \;;\; h = x \cdot \sin 40° = \frac{1m}{\sin 30°} \cdot \sin 40°$$

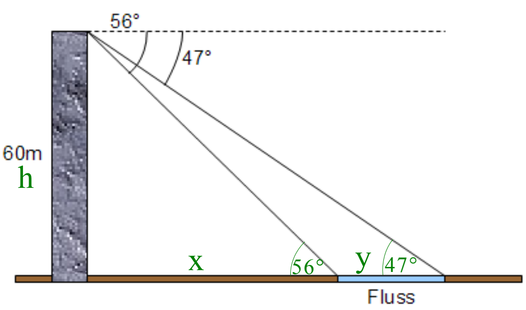
$$\sin\alpha = \frac{h}{y} = \frac{\frac{1m}{\sin 30°} \cdot \sin 40°}{\frac{1m}{\sin 20°}} = \frac{\sin 40° \cdot \sin 20°}{\sin 30°} = 0{,}44 \rightarrow \alpha = 26°$$

In der Formel für sin α kürzt sich die Höhe 1 m heraus und kommt deshalb nicht mehr vor. Das Ergebnis gilt also auch für andere Höhen in der mittleren Skizze. Die Längen x und y der Balken hängen aber selbstverständlich von der Höhe in der mittleren Skizze ab.

---

5 Ein Urlauber schaut vom 60 m hohen Turm einer Burg und sieht die beiden Ufer eines Flusses unter den Winkeln 56° und 47°.

Berechne die Breite des Flusses.



Sei h die Höhe des Turms, x der Abstand des Turms vom Fluss und y die Breite des Flusses. Dann gilt:

$$\tan 56° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 56°}$$

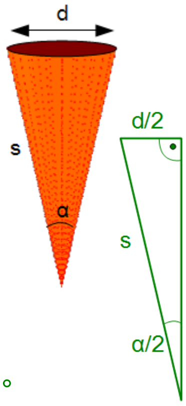
$$\tan 47° = \frac{h}{x+y} \rightarrow x+y = \frac{h}{\tan 47°}$$

$$y = \frac{h}{\tan 47°} - x = \frac{h}{\tan 47°} - \frac{h}{\tan 56°} = h \cdot \left(\frac{1}{\tan 47°} - \frac{1}{\tan 56°}\right) = 60m \cdot \left(\frac{1}{\tan 47°} - \frac{1}{\tan 56°}\right) \approx 15{,}5m$$

Die Breite des Flusses beträgt etwa 15,5 m.

6 Zu Weihnachten bastelt eine Familie spitze Tüten (ähnlich den Zuckertüten zur Einschulung), die an eine große Kugel geklebt werden und so einen schönen Stern ergeben.
Die Seitenlängen s der Tüten sind 10-mal so lang wie der Durchmesser d der Kreisgrundfläche.

Berechne die Größe des Winkels α an der Tütenspitze.



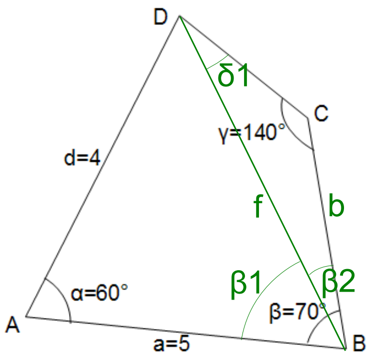
Denkt man sich die Achse der Tüte eingezeichnet, ergibt sich im Schnittbild die rechte Hilfsfigur, ein rechtwinkliges Dreieck.

In dem Dreieck gilt: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{d}{2}}{s}=\frac{d}{2\cdot s}\overset{s=10\cdot d}{=}\frac{d}{2\cdot 10\cdot d}=\frac{1}{20}\ \rightarrow\ \frac{\alpha}{2}\approx 2{,}86\,°\ \rightarrow\ \alpha\approx 5{,}73\,°$

Der Winkel in der Tütenspitze beträgt etwa 5,7°.

---

7 Berechne den Flächeneinheit des Vierecks. Achtung: Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht!



Plan:

1. Mit der Flächenformel $A_1=\frac{1}{2}\cdot a\cdot d\cdot\sin\alpha$ *kann man unmittelbar die Fläche des ersten Teildreiecks ABD berechnen.*
2. Mit dem Kosinussatz wird f berechnet.
3. Der Sinussatz liefert β_1*.*
4. $\beta_2=\beta-\beta_1$
5. $\delta_1=180°-\beta_2-\gamma$
6. Die Länge der Seite b wird mit dem Sinussatz berechnet.
7. Mit der Formel $A_2=\frac{1}{2}\cdot b\cdot f\cdot\sin\beta_2$ *kann nun das zweite Teildreieck BCD berechnet werden.*

Lösung:

zu 1.: $A_1=\frac{1}{2}\cdot a\cdot d\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\sin 60\,°=10\cdot\sin 60\,°=10\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=5\cdot\sqrt{3}\approx 8{,}66$

zu 2.: $f^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=5^2+4^2-2\cdot 5\cdot 4\cdot\cos 60\,°=25+16-20=21\ \rightarrow\ f=\sqrt{21}$

zu 3.: $\frac{\sin\beta_1}{d}=\frac{\sin\alpha}{f}\ \rightarrow\ \sin\beta_1=\frac{d}{f}\cdot\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{21}}\cdot\sin 60\,°=\frac{4}{\sqrt{21}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{7}}\ \rightarrow\ \beta_1\approx 49{,}1\,°$

zu 4.: $\beta_2=\beta-\beta_1=70\,°-49{,}1\,°=20{,}9\,°$

zu 5.: $\delta_1=180\,°-20{,}9\,°-140\,°=19{,}1\,°$

zu 6.: $\frac{b}{\sin\delta_1}=\frac{f}{\sin\gamma}\ \rightarrow\ b=f\cdot\frac{\sin\delta_1}{\sin\gamma}=\sqrt{21}\cdot\frac{\sin 19{,}1\,°}{\sin 140\,°}\approx 2{,}33$

zu 7.: $A_2=\frac{1}{2}\cdot b\cdot f\cdot\sin\beta_2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\cdot\frac{\sin 19{,}1\,°}{\sin 140\,°}\cdot\sqrt{21}\cdot\sin 20{,}9\,°=10{,}5\cdot\frac{\sin 19{,}1\,°}{\sin 140\,°}\cdot\sin 20{,}9\,°\approx 1{,}91$

Die gesamte Fläche ergibt sich zu $A=A_1+A_2\approx 8{,}66+1{,}91=10{,}57$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!

$$\sin\alpha = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}} \;;\; \cos\alpha = \frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}} \;;\; \tan\alpha = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \;;\; \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) \;;\; \cos\alpha = \cos(-\alpha) = \cos(360° - \alpha) \;;\; \tan\alpha = \tan(\alpha + 180°) = \tan(\alpha - 180°)$$

Sinussatz (r ist Umkreisradius): $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot r$

Flächeninhalt A eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Umformungen des Kosinussatzes zur Berechnung der Winkel:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$