2010-02-25 Klassenarbeit 3 Klasse 8d Mathematik

Lösung

1 Gib die Lösungsmengen folgender Gleichungen an

a) $x-4=0$ $\quad x=4 \rightarrow \mathbb{L}=\{4\}$

b) $x^2-4=0$ $\quad x^2=4 \rightarrow |x|=2 \rightarrow x_{1,2}=\pm 2 \rightarrow \mathbb{L}=\{-2;2\}$

c) $x^2=(\sqrt{9})^2$ $\quad x^2=9 \rightarrow |x|=3 \rightarrow x_{1,2}=\pm 3 \rightarrow \mathbb{L}=\{-3;3\}$

d) $x^2=4^3$ $\quad x^2=64 \rightarrow |x|=8 \rightarrow x_{1,2}=\pm 8 \rightarrow \mathbb{L}=\{-8;8\}$

---

2 Wandle $7,\overline{36}$ rechnerisch in einen Bruch um, der so weit wie möglich gekürzt ist.

$x=7,\overline{36} \rightarrow 100x=736,\overline{36} \rightarrow 99x=736,\overline{36}-7,\overline{36}=729 \rightarrow x=\frac{729}{99}\underset{9}{=}\frac{81}{11}$

---

3 Bestimme die Definitionsmenge für folgende Terme:

a) $\sqrt{\sqrt{4+x}}$ *x muss größer als -4 sein, damit unter der Wurzel eine positive Zahl steht. Die äußere Wurzel spielt keine Rolle, weil die innere Wurzel einen positiven Wert hat. Es folgt:* $\mathbb{D}=\{x \mid x \geq -4\}$

b) $\sqrt{\sqrt{4}+x}$ *x muss größer als -2 sein, damit unter der Wurzel eine positive Zahl steht. Es folgt:* $\mathbb{D}=\{x \mid x \geq -2\}$

c) $\sqrt{4+\sqrt{x}}$ *x darf jeden beliebigen positiven Wert einschließlich 0 annehmen, da die Wurzel aus x dann immer positiv ist und dazu noch 4 addiert wird. Unter der äußeren Wurzel steht dann also in jedem Fall eine positive Zahl. Es folgt:* $\mathbb{D}=\{x \mid x \geq 0\}$

d) $\sqrt{4-\sqrt{x}}$ *Wurzel aus x darf nicht größer als 4 sein, damit unter der äußeren Wurzel keine negative Zahl steht. x darf dann also nicht größer als 16 sein. Außerdem muss x größer oder gleich 0 sein, damit unter der inneren Wurzel eine positive Zahl steht. Es folgt:* $\mathbb{D}=\{x \mid 0 \leq x \leq 16\}$

---

4 Bringe den konstanten Faktor unter die Wurzel und vereinfache so weit wie möglich

a) $3\cdot\sqrt{7+m}= \sqrt{9}\cdot\sqrt{7+m}=\sqrt{9\cdot(7+m)}=\sqrt{63+9m}$

b) $\frac{4ac}{3}\cdot\sqrt{\frac{5c}{a}}= \sqrt{\frac{16a^2c^2}{9}}\cdot\sqrt{\frac{5c}{a}}=\sqrt{\frac{16a^2c^2}{9}\cdot\frac{5c}{a}}=\sqrt{\frac{80ac^3}{9}}$

---

5 Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich. Unter den Wurzeln sollen die ganzen Zahlen so klein wie möglich sein.

a) $\sqrt{\frac{5}{6x}}\cdot\sqrt{30x^3}=\sqrt{\frac{5\cdot 30\cdot x^3}{6\cdot x}}=\sqrt{25\cdot x^2}=5\cdot|x|$

Das Betragszeichen ist eigentlich überflüssig, da x>0 sein muss, weil sonst die linke Wurzel nicht existiert.

b) $\sqrt{ab^2}:\sqrt{a^2b^4}=\sqrt{\frac{ab^2}{a^2b^4}}=\sqrt{\frac{1}{ab^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}\cdot|b|}$

c) $7k\cdot\sqrt{3}-2k\cdot\sqrt{2}-5k\cdot\sqrt{3}+k\cdot\sqrt{8}\overset{\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\cdot\sqrt{2}}{=}7k\cdot\sqrt{3}-2k\cdot\sqrt{2}-5k\cdot\sqrt{3}+2k\cdot\sqrt{2}=2\cdot k\cdot\sqrt{3}$

d) $\sqrt{50}-\sqrt{2}=\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{2}=5\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}$

e) $-\sqrt{c}+6\cdot\sqrt{c}=5\cdot\sqrt{c}$

f) $\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{108}=\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{25\cdot 3}+\sqrt{36\cdot 3}=3\cdot\sqrt{3}-5\cdot\sqrt{3}+6\cdot\sqrt{3}=4\cdot\sqrt{3}$

---

6 Löse die Klammern auf und vereinfache so weit wie möglich.

a) $(3\sqrt{7}+\sqrt{11})(3\sqrt{7}-\sqrt{11})=9\cdot 7-11=63-11=52$

b) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{8}+\sqrt{3})=\sqrt{16}+\sqrt{6}-\sqrt{24}-\sqrt{9}=4+\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{6}-3=1-\sqrt{6}$

c) $\left(\sqrt{p}+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)\left(\sqrt{p}-\frac{1}{\sqrt{p}}\right)=p-\frac{1}{p}=\frac{p^2-1}{p}$

d) $(5\sqrt{a}-8\sqrt{b})(3\sqrt{b}+5\sqrt{a})=15\sqrt{ab}+25a-24b-40\sqrt{ab}=25a-24b-25\sqrt{ab}$

e) $\sqrt{cd^2}\cdot(\sqrt{c}+\sqrt{d})+(\sqrt{c}-\sqrt{d})\cdot\sqrt{c^2d}=\sqrt{c^2d^2}+\sqrt{cd^3}+\sqrt{c^3d}-\sqrt{c^2d^2}=\sqrt{cd^3}+\sqrt{c^3d}=\sqrt{cd}\cdot(|d|+|c|)$

---

7 Mache die Nenner rational (d.h.: wandle die Brüche so um, dass im Nenner keine Wurzel mehr vorkommt).

a) $\frac{x^2\sqrt{y}-y^2\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\overset{\cdot\sqrt{xy}}{=}\frac{x^2\sqrt{xy^2}-y^2\sqrt{x^2y}}{xy}=\frac{x^2y\sqrt{x}-xy^2\sqrt{y}}{xy}=x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$

Auf die Beträge kann verzichtet werden, da der Ausgangsterm nur definiert ist, wenn $x\geq 0$ und $y\geq 0$.

b) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}\overset{\cdot(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{=}\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{11}+\sqrt{3})(\sqrt{11}-\sqrt{3})}=\frac{11-2\cdot\sqrt{33}+3}{11-3}=\frac{14-2\cdot\sqrt{33}}{8}=\frac{7-\sqrt{33}}{4}$

c) $\frac{2}{5-\sqrt{3}}\overset{\cdot(5+\sqrt{3})}{=}\frac{2\cdot(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}=\frac{10+2\cdot\sqrt{3}}{25-3}=\frac{10+2\cdot\sqrt{3}}{22}=\frac{5+\sqrt{3}}{11}$

---

8 Zeige durch Rechnung (ohne Taschenrechner), dass

$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$ $\quad | ()^2$

linke Seite: $11-6\sqrt{2}$

rechte Seite: $\left(3-\sqrt{2}\right)^2=9-6\sqrt{2}+2=11-6\sqrt{2}$

Da die linke und die rechte Seite der Gleichung übereinstimmen und sich die Rechnung von unten nach oben auch rückgängig machen lässt, gilt die aufgestellte Behauptung.

---

9 Im alten Schulgebäude hatten wir einen Physikraum mit den Seitenlängen 7m und 12m.
Der Neubau ist nun mit quadratischen Räumen ausgestattet. Die Fläche des Physikraums ist aber gleich geblieben.
Berechne die Seitenlänge des neuen Klassenraums.

Die Fläche des alten Raums betrug $7\,m\cdot 12\,m=84\,m^2$.

Da der neue Raum eine gleich große Fläche besitzt und quadratisch ist, muss für seine Seitenlänge L gelten $L\cdot L=84\,m^2 \;\rightarrow\; L=\sqrt{84\,m^2}\approx 9{,}2\,m$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!