Lösung

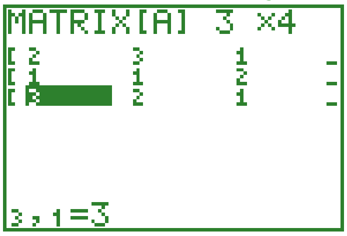
1

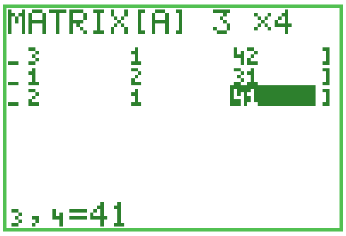
Berechne jeweils, welche Masse ein 20-Cent-Stück, ein 1-€-Stück und ein 2-€-Stück hat.

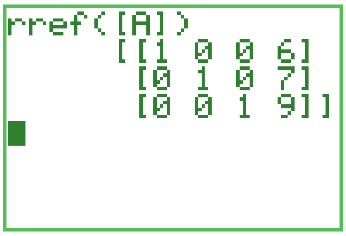
2 x 20 Cent ; 3 x 1 € ; 1 x 2 € 1 x 20 Cent ; 1 x 1 € ; 2 x 2 € 3 x 20 Cent ; 2 x 1 € ; 1 x 2 €

Mit x für 20 Cent, y für 1 € und z für 2 € ergibt sich folgendes Gleichungssystem, das mit dem Matrix-Befehl rref des Taschenrechners gelöst wird:

$$\left|\begin{array}{l} 2x+3y+z=42 \\ x+y+2z=31 \\ 3x+2y+z=41 \end{array}\right|$$





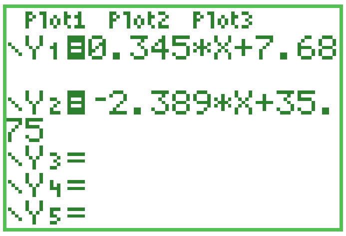


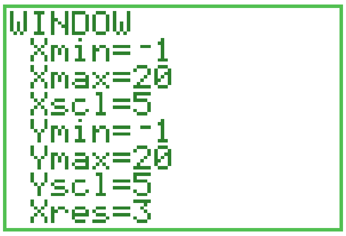
Es ergeben sich die Werte x=6 ; y=7 und z=9, d.h. die Massen der Geldstücke sind:

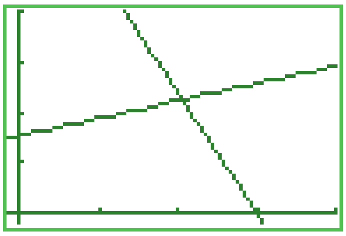
20 Cent → 6 g ; 1 € → 7 g ; 2 € → 9 g

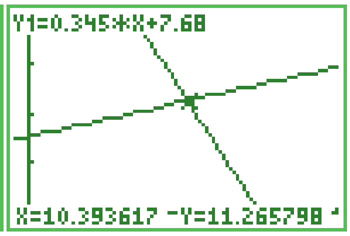
2

Zwei Geradengleichungen sind gegeben: $y=0{,}345\cdot x+7{,}68$ $y=-2{,}389\cdot x+35{,}75$
Lasse den Taschenrechner die Geraden zeichnen und ermittle mit Hilfe der Graphen die x- und die y-Koordinate des Schnittpunktes der beiden Geraden. Den GTR also nicht rechnen lassen, sondern nur ablesen wie bei einem Graph im Heft.
Den Grafik-Cursor darfst Du benutzen.
Gib alle zum Ablesen benutzten WINDOW-Einstellungen Deines Taschenrechners an.









Mit dem TRACE-Befehl ergibt sich die Näherungslösung (10,4/11,3).
Genauerer Wert:(10,267008.../11,222117...)]

3

Zu einem Musikwettbewerb für Vokalmusik sind Gruppen mit 3 oder 4 Sänger(inne)n zugelassen. Als beim Wettbewerb die vielen Teilnehmer eintreffen, verliert der Organisator den Überblick. Er hat nur notiert, dass es 27 Gruppen sind und dass insgesamt 93 Teilnehmer gekommen sind.
Berechne, wie viele 3-er- und wie viele 4-er-Gruppen teilnehmen.

Sei x die Anzahl der 3-er-Gruppen und y die Anzahl der 4-er-Gruppen. Dann gilt

$$\left|\begin{matrix} x+y=27 \\ 3\cdot x+4\cdot y=93 \end{matrix}\right| \rightarrow \left|\begin{matrix} x=27-y \\ 3\cdot x+4\cdot y=93 \end{matrix}\right| \rightarrow 3\cdot(27-y)+4\cdot y=93 \rightarrow 81-3\cdot y+4\cdot y=93 \overset{-81}{\rightarrow} y=12$$

Aus der 1. Gleichung folgt daraus $x=27-12=15$.

Es sind also 15 Trios und 12 Quartette zum Wettbewerb gekommen.

4

Berechne die Koordinaten x und y des Schnittpunktes der beiden Geraden ohne Hilfe des Taschenrechners: $y=2x-3$ $\quad y=-x+3$ Gib die Zwischenrechnungen an.

$$\left|\begin{matrix} y=2x-3 \\ y=-x+3 \end{matrix}\right| \rightarrow 2x-3=-x+3 \overset{+x+3}{\rightarrow} 3x=6 \overset{:3}{\rightarrow} x=2 \rightarrow y=-2+3=1$$

Die Geraden schneiden sich also im Punkt (2/1).

5

Löse das Gleichungssystem $\left|\begin{matrix} 2xy-9y=3 \\ 10+xy=5y+13 \end{matrix}\right|$.

Aus der 2. Gleichung folgt: $10+xy=5y+13 \overset{-10}{\rightarrow} xy=5y+3$

Einsetzen in Gleichung 1: $2\cdot(5y+3)-9y=3 \rightarrow 10y+6-9y=3 \overset{-6}{\rightarrow} y=-3$

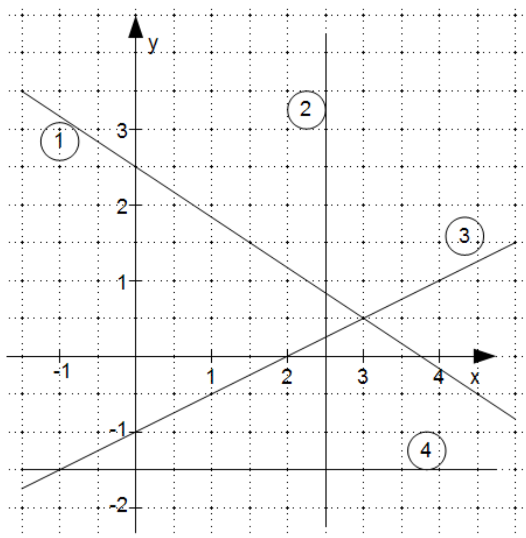
Einsetzen in der umgeformten Gleichung 1: $x\cdot(-3)=5\cdot(-3)+3=-15+3=-12 \overset{:(-3)}{\rightarrow} x=4$

Das Gleichungssystem hat also die Lösung $\mathbb{L}=\{(4/-3)\}$

6

Schreibe an die Gleichungen die Nummer der passenden Geraden. Einige Gleichungen bleiben ohne Nummer.

$y=\frac{5}{2}$	$y=3\cdot x+\frac{7}{2}$
$y=\frac{1}{2}\cdot x-1$ 3	$x=\frac{5}{2}$ 2
$y=\frac{-3}{2}$ 4	$y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{5}{2}$
$x=\frac{1}{2}\cdot y+2$	$x=-\frac{3}{2}$
$y=\frac{5}{2}-\frac{2}{3}\cdot x$ 1	$y=\frac{1}{2}\cdot y+1$



7 Johannes und Margarethe lieben Lebkuchen. Auf dem Weihnachtsmarkt geben sie ihr ganzes Geld an einer Marktbude aus, die vollständig mit Lebkuchenherzen behängt ist. Auf dem Heimweg vergleichen sie und stellen fest, dass beide gleich viel Herzen hätten, wenn Margarethe 2 Herzen an Johannes abgeben würde. Wenn dagegen Johannes 1 Herz an Margarethe abgeben würde, hätte Margarethe doppelt so viel Herzen wie Johannes. Berechne, wie viel Lebkuchenherzen jeder der beiden hat.

Margarethe hat m Herzen und Johannes hat j Herzen. Dann gilt:

Margarethe gibt 2 Herzen ab: $m-2=j+2$ *Johannes gibt 1 Herz ab:* $2\cdot(j-1)=m+1$

$$\left|\begin{array}{l} m-2=j+2 \\ 2\cdot(j-1)=m+1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{l} m-j=4 \\ 2j-2=m+1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{l} m-j=4 \\ -m+2j=3 \end{array}\right| \xrightarrow{+} j=7 \xrightarrow{\text{obere Gleichung}} m-7=4 \xrightarrow{+7} m=11$$

Johannes hat also 7 Herzen gekauft und Margarethe 11 Herzen.

---

8 Bei den Weihnachtseinkäufen wird es Johannes und Margarethe zu langweilig. Sie fahren mit der Rolltreppe und stellen fest, dass sie, wenn sie auf der Rolltreppe mit konstanter Geschwindigkeit gehen, für die Hinfahrt 20 s und für die Rückfahrt 80 s gebrauchen (einmal in und einmal gegen die Fahrtrichtung). Die Rolltreppe ist 16 m lang. Berechne die Geschwindigkeit der Kinder und die Geschwindigkeit der Treppe.

Die Geschwindigkeit in Bezug auf das Kaufhaus setzt sich zusammen aus den Geschwindigkeiten einerseits der Kinder (v_K) und andererseits der Rolltreppe (v_R).

Für die Hinfahrt berechnet sich die Geschwindigkeit zu $v_H=\frac{16\,m}{20\,s}=\frac{4}{5}\frac{m}{s}=0{,}8\frac{m}{s}$.

Für die Rückfahrt berechnet sich die Geschwindigkeit zu $v_Z=\frac{16\,m}{80\,s}=\frac{1}{5}\frac{m}{s}=0{,}2\frac{m}{s}$.

Bei der Hinfahrt addieren sich die Geschwindigkeiten v_K und v_R zu v_H,
die Geschwindigkeit v_Z bei der Rückfahrt ergibt sich als Differenz von v_K und v_R:

$$\left|\begin{array}{l} v_K+v_R=v_H \\ v_K-v_R=v_Z \end{array}\right| \xrightarrow{+} 2\cdot v_K=v_H+v_Z=\frac{4}{5}\frac{m}{s}+\frac{1}{5}\frac{m}{s}=\frac{5}{5}\frac{m}{s}=1\frac{m}{s} \xrightarrow{:2} v_K=\frac{1}{2}\frac{m}{s}$$

$$\left|\begin{array}{l} v_K+v_R=v_H \\ v_K-v_R=v_Z \end{array}\right| \xrightarrow{-} 2\cdot v_R=v_H-v_Z=\frac{4}{5}\frac{m}{s}-\frac{1}{5}\frac{m}{s}=\frac{3}{5}\frac{m}{s} \xrightarrow{:2} v_R=\frac{3}{10}\frac{m}{s}$$

Die Kinder bewegen sich also mit der Geschwindigkeit $v_K=0{,}5\frac{m}{s}$, *die Rolltreppe mit* $v_R=0{,}3\frac{m}{s}$.

---

9 Das Gleichungssystem $\left|\begin{array}{l} x-ay=2b \\ 3x-y=b+5 \end{array}\right|$ hat für x und y die Lösung 𝕃 = {(6/8)}.
Berechne die Werte von a und b.

$$\left|\begin{array}{l} x-ay=2b \\ 3x-y=b+5 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{x und y einsetzen}} \left|\begin{array}{l} 6-8\cdot a=2b \\ 3\cdot 6-8=b+5 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{umformen}} \left|\begin{array}{l} 8a+2b=6 \\ b=18-8-5=5 \end{array}\right| \to 8a+2\cdot 5=6 \to$$

$8a=-4 \to a=-\frac{1}{2}$ *Die gesuchten Werte sind* $a=-0{,}5$ *und* $b=5$.

---

10 Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme:

a) $\left|\begin{matrix} 4x-6y=7 \\ 9y=15+6x \end{matrix}\right| \underset{\text{unten - 6x}}{\rightarrow} \left|\begin{matrix} 4x-6y=7 \\ -6x+9y=15 \end{matrix}\right| \underset{\text{unten : 3}}{\rightarrow} \left|\begin{matrix} 4x-6y=7 \\ -2x+3y=5 \end{matrix}\right| \underset{\text{unten} \cdot (-2)}{\rightarrow} \left|\begin{matrix} 4x-6y=7 \\ 4x-6y=-10 \end{matrix}\right| \rightarrow 7=-10$

Die Gleichung hat keine Lösung : $\mathbb{L}=\{\}$.

b) $\left|\begin{matrix} 6x+4y=20 \\ 10y=50-15x \end{matrix}\right| \underset{\text{unten +15x}}{\rightarrow} \left|\begin{matrix} 6x+4y=20 \\ 15x+10y=50 \end{matrix}\right| \overset{\text{oben :2}}{\underset{\text{unten :5}}{\rightarrow}} \left|\begin{matrix} 3x+2y=10 \\ 3x+2y=10 \end{matrix}\right| \rightarrow 0=0$

Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen : $\mathbb{L}=\{(x/y)|3x+2y=10\}$.

c) $\left|\begin{matrix} \frac{1}{4}\cdot x+7y=3 \\ \frac{2}{3}\cdot y-\frac{1}{2}\cdot x=\frac{4}{3} \end{matrix}\right| \overset{\text{oben} \cdot 4}{\underset{\text{unten} \cdot 6}{\rightarrow}} \left|\begin{matrix} x+28y=12 \\ -3x+4y=8 \end{matrix}\right| \overset{\text{oben}}{\rightarrow} x=12-28y \underset{\text{unten einsetzen}}{\rightarrow} -3\cdot(12-28y)+4y=8 \rightarrow$

$-36+84y+4y=8 \overset{+36}{\rightarrow} 88y=44 \rightarrow y=\frac{44}{88}=\frac{1}{2} \rightarrow x=12-28\cdot\frac{1}{2}=12-14=-2$

Mit x=-2 und y=0,5 ergibt sich die Lösung $\mathbb{L}=\{(-2/0,5)\}$.

Anmerkung:

Manche Aufgaben lassen sich auch einfacher mit dem Taschenrechner lösen (Matrix, rref-Befehl).

Da im Unterricht das Umformen von Gleichungssystemen ohne Hilfe des Taschenrechners behandelt wurde, sind hier bei Gleichungssystemen mit 2 Gleichungen die Umformungen gezeigt.

Lösung von Aufgabe 1 mit Umformungen:

$\left|\begin{matrix} 2x+3y+z=42 \\ x+y+2z=31 \\ 3x+2y+z=41 \end{matrix}\right| \overset{2\cdot(1)-(2)}{\underset{(1)-(3)}{\rightarrow}} \left|\begin{matrix} 3x+5y=53 \\ -x+y=1 \end{matrix}\right| \overset{y=x+1}{\rightarrow} 3x+5\cdot(x+1)=53 \rightarrow 3x+5x+5=53 \overset{-5}{\rightarrow}$

$8x=48 \overset{:8}{\rightarrow} x=6 \rightarrow y=x+1=6+1=7 \overset{\text{in (2) einsetzen}}{\rightarrow} 6+7+2z=31 \overset{-13}{\rightarrow} 2z=18 \rightarrow z=9$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!