Lösung

1 Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode eine Stammfunktion: $\int 6x^2 \sin x^3 \, dx =$

Substitution $z = x^3 \;\rightarrow\; \frac{dz}{dx} = 3x^2 \;\rightarrow\; dx = \frac{1}{3x^2} dz$

$$\int 6x^2 \sin x^3 \, dx = \int 6x^2 \sin z \cdot \frac{1}{3x^2} dz = \int 2 \cdot \sin z \, dz = -2 \cdot \cos z = -2 \cdot \cos x^3$$

---

2 Berechnen Sie $\int_{-1}^{1} (3x+4) \cdot e^x \, dx =$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{(3x+4)}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx = \left[\underbrace{(3x+4)}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \underbrace{3}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} dx = \left[(3x+4) \cdot e^x - 3 \cdot e^x \right]_{-1}^{1} = (7e - 3e) - \left(\frac{1}{e} - \frac{3}{e} \right) = 4e + \frac{2}{e} \approx 11{,}6$$

---

3 Ein Sektglas, dessen Kelch die Höhe 15 cm haben soll, soll bis an den Rand gefüllt 200 cm^3 enthalten. Die Form des Glases kann man sich entstanden denken durch Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = \sqrt{k \cdot x}$ um die x-Achse. Berechnen Sie den Wert von k.

Mit der Formel $V = \pi \cdot \int y^2 \, dx$ *für das Rotationsvolumen bei Drehung um die x-Achse gilt hier*

$$V = \pi \cdot \int_0^{15} \sqrt{k \cdot x}^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{15} (k \cdot x) \, dx = \pi \cdot k \cdot \int_0^{15} x \, dx = \pi \cdot k \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{15} = \pi \cdot k \cdot \left(\frac{225}{2} - 0 \right) = 112{,}5 \cdot \pi \cdot k$$

Da V=200cm³ gegeben ist, gilt $112{,}5 \cdot \pi \cdot k = 200 \;\rightarrow\; k = \frac{200}{112{,}5 \cdot \pi} \approx 0{,}566$.

---

4 Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x-1}$ soll durch ein Taylorpolynom vom Grad 3 an der Stelle 0 angenähert werden. Berechnen Sie dieses Taylorpolynom.

Das Taylorpolynom hat die Struktur $t_0(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3$

Es gilt $f(x) = \frac{1}{x-1} \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \;\rightarrow\; f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \;\rightarrow\; f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$

und damit $f(0) = \frac{1}{-1} = -1$; $f'(0) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1$; $f''(0) = \frac{2}{(-1)^3} = -2$; $f'''(0) = \frac{-6}{(-1)^4} = -6$

Also: $t_0(x) = -\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \cdot x - \frac{2}{2!} \cdot x^2 - \frac{6}{3!} \cdot x^3 = -\frac{1}{1} - \frac{1}{1} \cdot x - \frac{2}{2} \cdot x^2 - \frac{6}{6} \cdot x^3 = -1 - x - x^2 - x^3$

---

5 Gegeben ist die Funktionsschar mit der Gleichung $f_k(x)=\frac{k\cdot x^2-x}{x-k}$.

a) Zeigen Sie, dass die 1. Ableitung von $f_k(x)$ gegeben ist durch $f_k{}'(x)=\frac{k\cdot x^2-2\cdot k^2\cdot x+k}{(x-k)^2}$.

Quotientenregel: $f_k(x)=\frac{k\cdot x^2-x}{x-k} \rightarrow f_k{}'(x)=\frac{(2kx-1)\cdot(x-k)-(kx^2-x)\cdot 1}{(x-k)^2}=$

$\frac{2kx^2-2k^2x-x+k-kx^2+x}{(x-k)^2}=\frac{kx^2-2k^2x+k}{(x-k)^2}$ *was zu zeigen war.*

b) Zeigen Sie, dass für die x-Werte der Hoch- und Tiefpunkte gilt $x_{1,2}=k\pm\sqrt{k^2-1}$.

Bedingung: $f'(x)=0 \rightarrow kx^2-2k^2x+k=0 \overset{:k}{\rightarrow} x^2-2kx+1=0 \overset{p-q-Formel}{\rightarrow} x_{1,2}=k\pm\sqrt{k^2-1}$ *w.z.z.w.*

c) Geben Sie an, für welche k-Werte es Hoch- und Tiefpunkte gibt.

Unter der Wurzel in der Lösung darf keine negative Zahl stehen: $k^2-1\geq 0 \rightarrow k\geq 1 \text{ oder } k\leq -1$

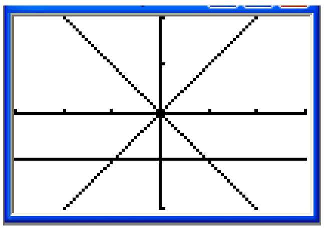
Die Lösungen $k=1$ *und* $k=-1$ *entfallen (siehe Aufgabenteil e).*

d) Berechnen Sie die Gleichung der Kurve (Ortskurve), auf der alle Hoch- und Tiefpunkte liegen.

Die Gleichung $x^2-2kx+1=0$ *wird nach k aufgelöst. Der Ergebnisterm wird in die Funktionsgleichung eingesetzt:*

$$x^2+1=2kx \rightarrow \frac{x^2+1}{2x}=k \rightarrow y=\frac{kx^2-x}{x-k}=\frac{\frac{x^2+1}{2x}\cdot x^2-x}{x-\frac{x^2+1}{2x}}=\frac{\frac{x^3+x-2x}{2}}{\frac{2x^2-x^2-1}{2x}}=\frac{x^4-x^2}{x^2-1}=\frac{x^2\cdot(x^2-1)}{x^2-1}=x^2$$

e) Für drei leicht zu ratende Werte von k ergeben sich auf Grund der Struktur des Funktionsterms besonders „einfache“ Funktionsgraphen. Finden Sie diese k-Werte und beschreiben Sie kurz die dazu gehörigen Funktionsgraphen.



Mit dem Taschenrechner lassen sich durch Einsetzen von ganzen Zahlen für k aus dem Bereich um 0 herum und Darstellung der entsprechenden Graphen die Werte -1, 0 und +1 als die gesuchten Werte finden.

$$k=-1 \; : \; f_{-1}(x)=\frac{-x^2-x}{x+1}=\frac{-x\cdot(x+1)}{x+1}=-x$$

$$k=0 \; : \; f_0(x)=\frac{0-x}{x-0}=\frac{-x}{x}=-1$$

$$k=+1 \; : \; f_{+1}(x)=\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x\cdot(x-1)}{x-1}=x$$

Es ergeben sich also 2 Ursprungsgeraden mit den Steigungen +1 und -1 und eine Parallele zur x-Achse bei y=-1.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!