



## Lösung

1 Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode eine Stammfunktion:  $\int 6x^2 \sin x^3 dx =$

$$\text{Substitution } z = x^3 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{1}{3x^2} dz$$

$$\int 6x^2 \sin x^3 dx = \int 6x^2 \sin z \cdot \frac{1}{3x^2} dz = \int 2 \cdot \sin z dz = -2 \cdot \cos z = -2 \cdot \cos x^3$$

2 Berechnen Sie  $\int_{-1}^1 (3x+4) \cdot e^x dx =$

$$\int_{-1}^1 (3x+4) \cdot e^x dx = \left[ (3x+4) \cdot e^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 3 \cdot e^x dx = \left[ (3x+4) \cdot e^x - 3 \cdot e^x \right]_{-1}^1 = (7e - 3e) - \left( \frac{1}{e} - \frac{3}{e} \right) = 4e + \frac{2}{e} \approx 11,6$$

3 Ein Sektglas, dessen Kelch die Höhe 15 cm haben soll, soll bis an den Rand gefüllt 200 cm<sup>3</sup> enthalten. Die Form des Glases kann man sich entstanden denken durch Rotation der Kurve mit der Gleichung  $y = \sqrt{k \cdot x}$  um die x-Achse. Berechnen Sie den Wert von k.

Mit der Formel  $V = \pi \cdot \int y^2 dx$  für das Rotationsvolumen bei Drehung um die x-Achse gilt hier

$$V = \pi \cdot \int_0^{15} \sqrt{k \cdot x^2} dx = \pi \cdot \int_0^{15} (k \cdot x) dx = \pi \cdot k \cdot \int_0^{15} x dx = \pi \cdot k \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{15} = \pi \cdot k \cdot \left( \frac{225}{2} - 0 \right) = 112,5 \cdot \pi \cdot k$$

$$\text{Da } V = 200 \text{ cm}^3 \text{ gegeben ist, gilt } 112,5 \cdot \pi \cdot k = 200 \rightarrow k = \frac{200}{112,5 \cdot \pi} \approx 0,566.$$

4 Die Funktion f mit der Gleichung  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  soll durch ein Taylorpolynom vom Grad 3 an der Stelle 0 angenähert werden. Berechnen Sie dieses Taylorpolynom.

$$\text{Das Taylorpolynom hat die Struktur } t_0(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3$$

$$\text{Es gilt } f(x) = \frac{1}{x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \rightarrow f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$$

$$\text{und damit } f(0) = \frac{1}{-1} = -1 ; f'(0) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1 ; f''(0) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 ; f'''(0) = \frac{-6}{(-1)^4} = -6$$

$$\text{Also: } t_0(x) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \cdot x - \frac{2}{2!} \cdot x^2 - \frac{6}{3!} \cdot x^3 = -\frac{1}{1} - \frac{1}{1} \cdot x - \frac{2}{2} \cdot x^2 - \frac{6}{6} \cdot x^3 = -1 - x - x^2 - x^3$$

5 Gegeben ist die Funktionsschar mit der Gleichung  $f_k(x) = \frac{k \cdot x^2 - x}{x - k}$ .

a) Zeigen Sie, dass die 1. Ableitung von  $f_k(x)$  gegeben ist durch  $f_k'(x) = \frac{k \cdot x^2 - 2 \cdot k^2 \cdot x + k}{(x - k)^2}$ .

Quotientenregel:  $f_k(x) = \frac{k \cdot x^2 - x}{x - k} \rightarrow f_k'(x) = \frac{(2kx - 1) \cdot (x - k) - (kx^2 - x) \cdot 1}{(x - k)^2} =$

$\frac{2kx^2 - 2k^2x - x + k - kx^2 + x}{(x - k)^2} = \frac{kx^2 - 2k^2x + k}{(x - k)^2}$  was zu zeigen war.

b) Zeigen Sie, dass für die x-Werte der Hoch- und Tiefpunkte gilt  $x_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 - 1}$ .

Bedingung:  $f'(x) = 0 \rightarrow kx^2 - 2k^2x + k = 0 \xrightarrow{:k} x^2 - 2kx + 1 = 0 \xrightarrow{p-q\text{-Formel}} x_{1,2} = k \pm \sqrt{k^2 - 1}$  w.z.z.w.

c) Geben Sie an, für welche k-Werte es Hoch- und Tiefpunkte gibt.

Unter der Wurzel in der Lösung darf keine negative Zahl stehen:  $k^2 - 1 \geq 0 \rightarrow k \geq 1$  oder  $k \leq -1$

Die Lösungen  $k = 1$  und  $k = -1$  entfallen (siehe Aufgabenteil e).

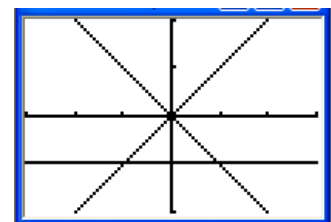
d) Berechnen Sie die Gleichung der Kurve (Ortskurve), auf der alle Hoch- und Tiefpunkte liegen.

Die Gleichung  $x^2 - 2kx + 1 = 0$  wird nach k aufgelöst. Der Ergebnisterm wird in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$$x^2 + 1 = 2kx \rightarrow \frac{x^2 + 1}{2x} = k \rightarrow y = \frac{kx^2 - x}{x - k} = \frac{\frac{x^2 + 1}{2x} \cdot x^2 - x}{x - \frac{x^2 + 1}{2x}} = \frac{\frac{x^3 + x - 2x}{2}}{\frac{2x^2 - x^2 - 1}{2x}} = \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 1)}{x^2 - 1} = x^2$$

e) Für drei leicht zu ratende Werte von k ergeben sich auf Grund der Struktur des Funktionsterms besonders „einfache“ Funktionsgraphen. Finden Sie diese k-Werte und beschreiben Sie kurz die dazu gehörigen Funktionsgraphen.

Mit dem Taschenrechner lassen sich durch Einsetzen von ganzen Zahlen für k aus dem Bereich um 0 herum und Darstellung der entsprechenden Graphen die Werte -1, 0 und +1 als die gesuchten Werte finden.



$k = -1 : f_{-1}(x) = \frac{-x^2 - x}{x + 1} = \frac{-x \cdot (x + 1)}{x + 1} = -x$

$k = 0 : f_0(x) = \frac{0 - x}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$

$k = +1 : f_{+1}(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x \cdot (x - 1)}{x - 1} = x$

Es ergeben sich also 2 Ursprungsgeraden mit den Steigungen +1 und -1 und eine Parallele zur x-Achse bei  $y = -1$ .

**Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!**