2008-12-02 Klausur 2 Kurs 13ma4-g Mathematik

Lösung

1 Berechnen Sie, welchen Wert man für k in der Geradengleichung g_1 einsetzen muss, damit sich die Geraden g_1 und g_2 schneiden.

$$g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix} \qquad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\3\\7\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der Geradenterme: $\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\7\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}5+\lambda=6+2\mu\\2=3-\mu\\1+k\cdot\lambda=7\end{Bmatrix}$

2. Gleichung: $2=3-\mu \rightarrow \mu=1$

1. Gleichung: $5+\lambda=6+2\mu \rightarrow 5+\lambda=6+2 \rightarrow \lambda=3$

3. Gleichung: $1+k\cdot\lambda=7 \rightarrow 1+3k=7 \rightarrow 3k=6 \rightarrow k=2$

Wenn k=2, schneiden sich die Geraden g_1 und g_2.

Probe: $g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\7\end{pmatrix}$ $\qquad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\3\\7\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\7\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\7\end{pmatrix}$

---

2 Berechnen Sie die Spurpunkte der Gerade g in allen 3 Koordinatenebenen.

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$$

Der Stützvektor der Gerade gibt an, dass die Gerade durch den Punkt (3/0/0) verläuft. Da dieser Punkt sowohl zur x-y-Koordinatenebene gehört als auch zur x-z-Koodinatenebene, ist der Punkt (3/0/0) jeweils der Spurpunkt in diesen Ebenen.

Zu untersuchen ist noch die y-z-Koordinatenebene . Der Ortsvektor zum Spurpunkt hat also die Form $\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}$.

Einsetzen in die Geradengleichung: $\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}0=3+\lambda\\y=2\lambda\\z=-4\lambda\end{Bmatrix}$

1. Gleichung: $0=3+\lambda \rightarrow \lambda=-3$

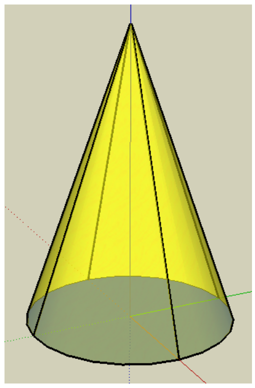
2. Gleichung: $y=2\lambda \rightarrow y=2\cdot(-3) \rightarrow y=-6$

3. Gleichung: $z=-4\lambda \rightarrow z=-4\cdot(-3) \rightarrow z=12$

(0/-6/12) ist also der Spurpunkt der Gerade in der y-z-Ebene.

---

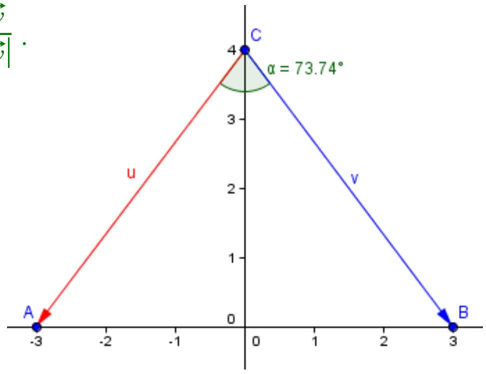
3 Ein Kegel ist gegeben, dessen kreisförmige Grundfläche sich so in der x-y-Ebene befindet, dass der Mittelpunkt des Kreises im Punkt (0/0/0) liegt.
Der Radius des Kreises hat die Länge 3.
Die Spitze des Kegels liegt auf der z-Achse beim z-Wert 4.
Beschreiben Sie zwei geeignete Seitenkanten des Kegels durch Vektoren und berechnen Sie mit Hilfe dieser Vektoren den Öffnungswinkel des Kegels oben in der Spitze.



Der zu berechnende Winkel in der Spitze des Kegels ist der größtmögliche Winkel. Man erhält ihn z. B., wenn man sich den Schnitt durch den Kegel in der x-z-Ebene zeichnet.

In der mit GeoGebra erstellten Zeichnung sieht man diesen Schnitt.
α ist der zu berechnende Winkel an der Spitze des Kegels.
Die gesuchten Vektoren entlang der Seitenkanten sind als roter und blauer Pfeil eingetragen.

Die Berechnung des Winkels erfolgt über die Gleichung $\cos\alpha = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.



Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ *folgt*

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{9+16}} = \frac{-9+16}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{7}{25} \rightarrow \alpha = \arccos\frac{7}{25} = 73{,}74$$

---

4 Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2.

$$E_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad E_2: \ 2x - y + z = 2$$

Für Ebene E_1 gilt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow x = -1 + \lambda - 2\mu \, ; y = 1 + 2\lambda + 3\mu \, ; z = 1 + 3\mu$

Einsetzen in E_2: $2x - y + z = 2 \rightarrow 2 \cdot (-1 + \lambda - 2\mu) - (1 + 2\lambda + 3\mu) + (1 + 3\mu) = 2 \rightarrow$

$-2 + 2\lambda - 4\mu - 1 - 2\lambda - 3\mu + 1 + 3\mu = 2 \rightarrow -4\mu - 2 = 2 \rightarrow -4\mu = 4 \rightarrow \mu = -1$

Da λ aus der Rechnung herausfällt, ist der Wert von λ beliebig.

Setzt man nun noch μ in der Ebenengleichung ein, erhält man die Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Wäre das λ nicht aus der Rechnung herausgefallen, hätte man die Gleichung z. B. nach λ auflösen können und dann den sich ergebenden Term für λ in die Ebenengleichung einsetzen müssen.

---

5 Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E.

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\7\\5\end{pmatrix}\qquad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}$$

Berechnung eines Normalenvektors $\vec{n}$ *zur Ebene E:* $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\6\\-4\end{pmatrix}=\vec{n}$

Mit $\vec{u}=\begin{pmatrix}-3\\7\\5\end{pmatrix}$ *als Richtungsvektor der Geraden g ergibt sich nun der Schnittwinkel aus*

$$\sin\alpha=\frac{\vec{u}*\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\begin{pmatrix}-3\\7\\5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}12\\6\\-4\end{pmatrix}}{\sqrt{9+49+25}\cdot\sqrt{144+36+16}}=\frac{-36+42-20}{\sqrt{83}\cdot\sqrt{196}}=\frac{-14}{\sqrt{83}\cdot 14}=-\frac{1}{\sqrt{83}}\approx-0{,}1098\ \rightarrow$$

$\sin\alpha_1=-6{,}3°;\sin\alpha_2=-173{,}7°$ *Von den beiden möglichen Schnittwinkelangaben wird üblicherweise der kleinere Winkel (≤90°) als Schnittwinkel angegeben. Das Minuszeichen kann ignoriert werden, da es bei den Vektoren lediglich auf die Richtung aber nicht auf die Orientierung ankommt.*

Die Gerade und die Ebene schneiden sich also unter dem Winkel 6,3°.

---

6 6.1 Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=x^3-3x+1$ in den Extrempunkten von f schneidet.

Berechnung der Stellen mit waagrechter Tangente von f:

1. Ableitung: $f'(x)=3x^2-3$ *2. Ableitung:* $f''(x)=6x$

Nullsetzen der 1. Ableitung: $3x^2-3=0\ \rightarrow\ 3x^2=3\ \rightarrow\ x^2=1\ \rightarrow\ x_{1,2}=\pm1$

$f''(\pm1)=6\cdot(\pm1)=\pm6\neq0$ *Es liegen also Extrempunkte vor.*

Funktionswerte: $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+1=-1+3+1=3$ $f(1)=1^3-3\cdot1+1=1-3+1=-1$

Extrempunkte sind also (-1/3) und (1/-1)

Einsetzen in die Geradengleichung:

(-1/3): $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{Bmatrix}-1=2+\lambda\\3=-3-2\lambda\end{Bmatrix}\ \rightarrow\ \begin{Bmatrix}\lambda=-3\\\lambda=-3\end{Bmatrix}$ *Punktprobe erfüllt.*

(1/-1): $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{Bmatrix}1=2+\lambda\\-1=-3-2\lambda\end{Bmatrix}\ \rightarrow\ \begin{Bmatrix}\lambda=-1\\\lambda=-1\end{Bmatrix}$ *Punktprobe erfüllt.*

6.2 Berechnen Sie mit dem Hilfsmittel „Extremwertaufgabe" der Analysis den kürzesten Abstand der Gerade zum Punkt (0/0) und untersuchen Sie, ob der Punkt der Geraden, der dem Punkt (0/0) am nächsten liegt, auch zum Graphen von f gehört.

Der Verbindungsvektor von (0/0) zur Gerade ist durch die Geradengleichung gegeben. Die Länge dieses Vektors soll minimal werden. Zunächst Berechnung der Länge L des Vektors:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\lambda\\-3-2\lambda\end{pmatrix}\ \rightarrow\ L=|\vec{x}|=\sqrt{(2+\lambda)^2+(-3-2\lambda)^2}=\sqrt{4+4\lambda+\lambda^2+9+12\lambda+4\lambda^2}=\sqrt{5\lambda^2+16\lambda+13}$$

Das minimale L erhält man durch Nullsetzen der 1. Ableitung von L:

$L' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5\lambda^2 + 16\lambda + 13}} \cdot (10\lambda + 16) \overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; 10\lambda + 16 = 0 \;\rightarrow\; 10\lambda = -16 \;\rightarrow\; \lambda = -1{,}6$

Da der Abstand eines Punktes zu einer Geraden, auf der er nicht liegt, genau ein Minimum und kein Maximum besitzt, muss die Gerade für λ=-1,6 den minimalen Abstand zum Punkt (0/0) haben.

Berechnung des Punktes der Geraden, der dem Punkt (0/0) am nächsten liegt:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 1{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1{,}6 \\ -3 + 3{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

Der minimale Abstand ist die Länge dieses Vektors:

$|\vec{x}| = \sqrt{0{,}4^2 + 0{,}2^2} = \sqrt{0{,}16 + 0{,}04} = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}447$

Überprüfen, ob der Punkt (0,4/0,2) auf dem Graphen von f liegt:

$f(0{,}4) = 0{,}4^3 - 3 \cdot 0{,}4 + 1 = 0{,}064 - 1{,}2 + 1 = -0{,}136 \neq 0{,}2$

Der Punkt liegt also nicht auf dem Graphen von f.

---

7 Untersuchen Sie rechnerisch, ob Punkt P oder Punkt Q näher an der Ebene E liegt.
$P(1/4/-2)$; $Q(3/-1/5)$; $E:\; 6x - 3y + 2z = 14$

Aufstellen der Hesseschen Normalenform:

Koordinatengleichung: $6x - 3y + 2z = 14$

Normalenform (NF): $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \vec{x} - 14 = 0$

Hessesche Normalenform (HNF): $\frac{1}{\sqrt{36+9+4}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \vec{x} - \frac{14}{\sqrt{36+9+4}} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{49}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \vec{x} - \frac{14}{\sqrt{49}} = 0 \;\rightarrow$

$\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \vec{x} - \frac{14}{7} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \vec{x} - 2 = 0$

Punkt P überprüfen: $\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 = \frac{1}{7} \cdot (6 - 12 - 4) - 2 = -\frac{10}{7} - \frac{14}{7} = -\frac{24}{7}$

Punkt Q überprüfen: $\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 = \frac{1}{7} \cdot (18 + 3 + 10) - 2 = \frac{31}{7} - \frac{14}{7} = \frac{17}{7}$

Die verschiedenen Vorzeichen bedeuten, dass die Punkte auf verschiedenen Seiten der Ebene liegen.

Da der Betrag des Abstandes von Q zur Ebene kleiner ist als der von P, liegt Q näher an der Ebene.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!