Lösung

1 Geben Sie auf Grund einer Rechnung an, ob der Punkt $P(-3/20)$ auf der Geraden mit der Gleichung $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ liegt.

Einsetzen in die Gleichung und Berechnung des λ-Wertes:

$$\begin{pmatrix}-3\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{array}{l}-3=2-\lambda_1\rightarrow\lambda_1=5\\20=4+3\lambda_2\rightarrow\lambda_2=\frac{16}{3}\end{array}$$

Da die λ-Werte nicht übereinstimmen, liegt der Punkt nicht auf der angegebene Geraden.

---

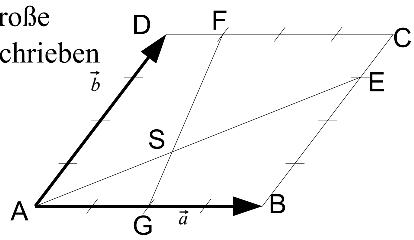
2 Geben Sie eine Geradengleichung an für die Gerade, die durch die beiden Punkte $A(5/-2/3)$ und $B(-8/0/4)$ verläuft.

Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-5-8\\2+0\\-3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13\\2\\1\end{pmatrix}$

Geradengleichung: $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-13\\2\\1\end{pmatrix}$

---

3 In nebenstehendem Parallelogramm sind alle Seiten in 4 gleich große Teilstücke geteilt. Die Strecke AB wird durch den Vektor $\vec{a}$ beschrieben und die Strecke AD durch den Vektor $\vec{b}$.
FG und AE schneiden sich in S.
Berechnen Sie, in welchem Verhältnis der Punkt S die Strecken AE und FG teilt.



Geschlossener Streckenzug ASGA: $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{AS}=\lambda\cdot\overrightarrow{AE}=\lambda\cdot\left(\vec{a}+\frac{3}{4}\cdot\vec{b}\right)=\lambda\cdot\vec{a}+\frac{3}{4}\cdot\lambda\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{SG}=\mu\cdot\overrightarrow{FG}=\mu\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\right)=\frac{1}{4}\cdot\mu\cdot\vec{a}-\mu\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}\rightarrow\lambda\cdot\vec{a}+\frac{3}{4}\cdot\lambda\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\cdot\mu\cdot\vec{a}-\mu\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\cdot\vec{a}=\vec{0}\rightarrow\vec{a}\cdot\left(\lambda+\frac{1}{4}\cdot\mu-\frac{1}{2}\right)+\vec{b}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\lambda-\mu\right)=\vec{0}\rightarrow$$

$$\begin{array}{l}\lambda+\frac{1}{4}\cdot\mu-\frac{1}{2}=0\\\frac{3}{4}\cdot\lambda-\mu=0\end{array}\rightarrow\begin{array}{l}\\\mu=\frac{3}{4}\cdot\lambda\end{array}\rightarrow\lambda+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\lambda-\frac{1}{2}=0\rightarrow\frac{19}{16}\cdot\lambda-\frac{1}{2}=0\rightarrow\lambda=\frac{8}{19}\rightarrow\mu=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{19}=\frac{6}{19}$$

S teilt also die Strecke AE im Verhältnis 8 zu 11 und die Strecke FG im Verhältnis 13 zu 6.

4 Wie müssen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gewählt werden, damit gilt

a) $\vec{a} * \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, b) $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \rightarrow \vec{a} \| \vec{b}$?

---

5 Berechnen Sie den Winkel α (beim Punkt A) im Dreieck ABC mit
$A(2/-1/-4); B(10/-1/2); C(5/-5/-4)$

Zur Berechnung des Winkels wird die Beziehung $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$ *bzw.* $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ *genutzt.*

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2+10 \\ 1-1 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2+5 \\ 1-5 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *gilt:*

$$\cos\alpha = \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{64+0+36} \cdot \sqrt{9+16+0}} = \frac{24+0+0}{\sqrt{100} \cdot \sqrt{25}} = \frac{24}{10 \cdot 5} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25} = 0{,}48 \rightarrow \alpha \approx 61{,}3°$$

---

6 Geben Sie die Koordinaten der Punkte an, die durch Spiegelung des Punktes $P(5/7/-3)$ entstehen:

a) Spiegelung an der x_1-x_3-Ebene $P'(5/-7/-3)$ b) Spiegelung an der x_3-Achse $P'(-5/-7/-3)$

---

7 Untersuchen Sie durch Rechnung, wie die Geraden g und h zueinander liegen.

$$g: \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad h: \vec{r}_h = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Überprüfung auf Parallelität: Bedingung: $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Da diese Gleichung für $c = -2$ *erfüllt ist, sind die Geraden parallel.*

Es bleibt zu überprüfen, ob die Geraden sogar identisch sind: Einsetzen des Stützvektors der einen Gerade in die Gleichung der anderen Gerade:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -4 = 2 - 3\lambda_1 \\ 3 = 1 + \lambda_2 \\ 4 = 0 + 2\lambda_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -6 = -3\lambda_1 \\ 2 = \lambda_2 \\ 4 = 2 \cdot \lambda_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}$$

Da alle λ-Werte übereinstimmen, sind die beiden Geraden identisch.

---

8 Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

An den Richtungsvektoren sieht man unmittelbar, dass diese nicht parallel sind, denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Richtungsvektoren sind zueinander senkrecht, da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ergibt:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0+0+0=0$$

Den Abstand zwischen den Geraden erhält man, indem man den Verbindungsvektor zwischen den beiden Geraden sucht, der senkrecht zu beiden Geraden (und damit zu den Richtungsvektoren) steht.

Ein beliebiger Verbindungsvektor wird beschrieben durch

$$-\vec{r}_1+\vec{r}_2=-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+\mu\\-\lambda+1\\\mu\end{pmatrix}$$

Bedingungen:

$$(-\vec{r}_1+\vec{r}_2)*\vec{u}=\begin{pmatrix}-1+\mu\\-\lambda+1\\\mu\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0+(-\lambda+1)+0=-\lambda+1\overset{!}{=}0\;\rightarrow\;\lambda=1$$

$$(-\vec{r}_1+\vec{r}_2)*\vec{v}=\begin{pmatrix}-1+\mu\\-\lambda+1\\\mu\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=(-1+\mu)+0+\mu=-1+2\mu\overset{!}{=}0\;\rightarrow\;2\mu=1\;\rightarrow\;\mu=\frac{1}{2}$$

Damit gilt $\left|-\vec{r}_1+\vec{r}_2\right|=\left|\begin{pmatrix}-1+\mu\\-\lambda+1\\\mu\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1+\frac{1}{2}\\-1+1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\approx 0{,}707$.

Die beiden Geraden haben also etwa den Abstand 0,707.

- -

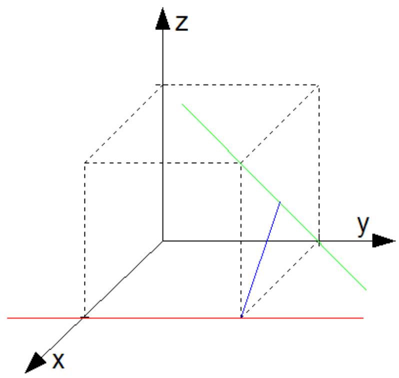
Einfacher ist die Bestimmung des Abstandes mit elementar-geometrischen Mitteln:

Die beiden Geraden laufen an einem Würfel mit der Seitenkante 1 entlang: Die erste Gerade ist rot dargestellt, die zweite Gerade grün. Die grüne Gerade verläuft auf der Diagonalen der rechten Seitenfläche.

Die blaue Strecke steht senkrecht auf der roten und der grünen Gerade und bildet die halbe Diagonale der rechten Seitenfläche.

Die Diagonale in einem Quadrat der Seitenlänge 1 hat die Länge $\sqrt{2}$.

Die halbe Diagonale hat also die Länge $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}707$.



Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!