Lösung

1 Zeigen Sie durch Rechnung, dass $\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}=\binom{n-1}{k+1}$.

$$\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-(k+1))!}-\frac{(n-1)!}{k!\cdot((n-1)-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}-\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}=$$

$$\frac{n\cdot(n-1)!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k-1)!}-\frac{(k+1)\cdot(n-1)!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k-1)!}=\frac{n\cdot(n-1)!-(k+1)\cdot(n-1)!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k-1)!}=\frac{(n-k-1)\cdot(n-1)!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=$$

$$\frac{(n-1)!}{(k+1)!\cdot(n-k-2)!}=\frac{(n-1)!}{(k+1)!\cdot((n-1)-(k+1))!}=\binom{n-1}{k+1}$$

---

2 In einer Klasse sind 12 Schülerinnen aus Barnstorf, 14 aus Diepholz und 6 aus Lemförde. 6 dieser Schülerinnen sollen ausgelost werden, um die Klasse bei einer Umfrage zu vertreten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 Schülerinnen aus Diepholz, 2 aus Barnstorf und 1 aus Lemförde ausgewählt werden.

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.
Ziehungen aus unterschiedlichen Teilmengen müssen berücksichtigt werden.

$$p(3D,2B,1L)=\frac{\binom{14}{3}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{32}{6}}=\frac{364\cdot 66\cdot 6}{906192}=\frac{144144}{906192}=0{,}159$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 16% werden 3 Schülerinnen aus Diepholz, 2 aus Barnstorf und 1 aus Lemförde ausgewählt.

---

3 8 einander fremde Personen steigen in einen Aufzug, der in die 12 oberen Stockwerke führt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 Personen im selben Stockwerk aussteigen, wenn die Personen unabhängig voneinander (durch Zufall) das Ziel-Stockwerk wählen.

Das Ereignis E ist „mindestens 2 Personen steigen im selben Stock aus".
Das Gegenereignis $\overline{E}$ ist „in jedem Stock steigt höchstens 1 Person aus".
Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit für $\overline{E}$ berechnet:
Um diese Bedingung einzuhalten, hat die 1. Person 12 Möglichkeiten für den Ausstieg, die 2. Personen noch 11 Möglichkeiten, usw.

$$p(\overline{E})=\frac{12}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{12^8}=\frac{12!}{12^8\cdot 4!}=\frac{479001600}{429981696\cdot 24}\approx 0{,}0464$$

Damit gilt $p(E)=1-p(\overline{E})\approx 1-0{,}0464=0{,}9536$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Personen in einem Stock aussteigen, beträgt als etwa 95%.

Anmerkung: Es geht auch so:
Anzahl der Möglichkeiten für eine Person, allein in einem Stock auszusteigen:

Ziehen ohne Zurücklegen mit Reihenfolge: $\frac{n!}{(n-k)!}$ *mit n=12 und k=8*

Anzahl der Möglichkeiten für eine Person, irgendwo auszusteigen:
Ziehen mit Zurücklegen mit Reihenfolge: n^k *mit n=12 und k=8.*

Daraus folgt, da alle Ausgänge gleich wahrscheinlich sind (Laplace)

$$p=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}=\frac{n!}{n^k\cdot(n-k)!}=\frac{12!}{12^8\cdot(12-8)!}=\frac{12!}{12^8\cdot 4!}\text{ (siehe oben).}$$

---

4 In einer Urne sind 50 rote und 70 gelbe Kugeln, die jeweils entweder die Zahl 0 oder die Zahl 1 als Aufschrift tragen.
Es gibt 30 rote Kugeln mit der Aufschrift 1 und 60 gelbe Kugeln mit der Aufschrift 0.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gezogene Kugel gelb ist oder die Aufschrift 1 trägt oder beide Bedingungen zusammen erfüllt.

Additionssatz: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

Es gibt 50 rote Kugeln, 30 davon mit einer 1 und 20 davon mit einer 0.
Es gibt 70 gelbe Kugeln, 10 davon mit einer 1 und 60 davon mit einer 0.
Zusammen sind es 120 Kugeln, von denen 40 eine 1 und 80 eine 0 tragen.

Mit A = „Kugel ist gelb“ und B = „Kugel hat die Aufschrift 1“ und

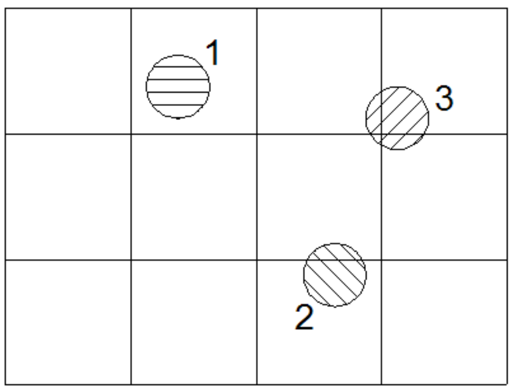
$$p(gelb)=\frac{70}{120};\ p(1)=\frac{40}{120};\ p(gelb\cap 1)=p(gelb)\cdot p_{gelb}(1)=\frac{70}{120}\cdot\frac{10}{70}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}\text{ gilt:}$$

$$p(gelb\ oder\ 1)=p(gelb)+p(1)-p(gelb\ und\ 1)=\frac{70}{120}+\frac{40}{120}-\frac{1}{12}=\frac{70}{120}+\frac{40}{120}-\frac{10}{120}=\frac{100}{120}=\frac{5}{6}$$

In 5 von 6 Fällen ist die gezogene Kugel gelb oder sie trägt die Aufschrift 1.

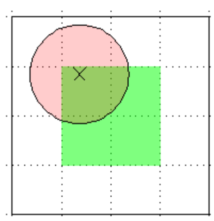
---

5 Bei einem Glücksspiel sollen runde Scheiben mit dem Durchmesser 50cm auf eine (unendlich ausgedehnte) Fläche mit einem Quadratmuster (Quadrate mit der Seitenlänge 1m) geworfen werden.
Man muss vorher sagen, wie die Scheibe liegen bleiben wird. Dabei gibt es drei Möglichkeiten zur Auswahl:
1. Es wird keine Quadrat-Begrenzungslinie berührt oder geschnitten.
2. Genau eine Begrenzungslinie wird berührt oder geschnitten.
3. Mindestens 2 Begrenzungslinien werden berührt oder geschnitten.

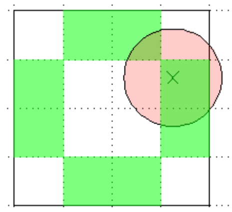


Welche Möglichkeit würden Sie wählen? Berechnen Sie zur Beantwortung dieser Frage die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg bei jedem der 3 Fälle.

Fall 1: Das große Quadrat ist in kleine Teilquadrate der Seitenlänge 0,25m eingeteilt. Der Radius der Scheibe beträgt auch 0,25m. Befindet sich der Mittelpunkt der Scheibe im grünen Bereich, so reicht der Umfang der Scheibe nicht an die Begrenzungslinien des großen Quadrats heran. Das grüne Quadrat besitzt 4 kleine Teilquadrate, das große Quadrat enthält 16 Teilquadrate. Für die Wahrscheinlichkeit gilt also $p=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

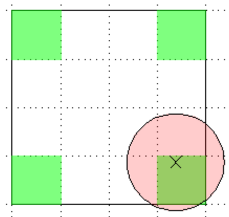


Fall 2: In diesem Fall muss der Mittelpunkt der Scheibe von einem Rand des großen Quadrats einen Abstand haben, der kleiner oder gleich dem Radius der Scheibe ist. Von den anderen Seiten muss der Abstand aber größer sein, da nur 1 Kante geschnitten werden soll. Die grünen Rechtecke geben die Bereiche an, in denen sich der Mittelpunkt der Scheibe befinden darf. Hier umfasst der grüne Bereich 8 kleine Teilquadrate.



Daraus berechnet sich für die Wahrscheinlichkeit: $p=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

Fall 3: Die Scheibe soll 2 Kanten des großen Quadrats schneiden. Mehr Kanten können auch nicht geschnitten werden, da der Durchmesser der Scheibe kleiner ist als die Seitenkante des großen Quadrats. Vom Eckpunkt darf dere Mittelpunkt der Scheibe höchstens einen Abstand vom Radius der Scheibe in waagrechter und senkrechter Richtung haben. Die grünen Flächen geben wieder den entsprechenden Bereich an. Nun umfasst der grüne Bereich 4 kleine Teilquadrate.



Daraus berechnet sich für die Wahrscheinlichkeit: $p=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

Im Fall 2 hat man also die größten Chancen, die Bedingung zu erfüllen. In etwa der Hälfte aller Fälle würde man gewinnen.

Anmerkung: Der Grenzfall „Berührung einer Kante“ wird hier nicht thematisiert.

---

6 Radioaktive Teilchen zerfallen mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit.
Im Mittel zerfällt ein Jod-131-Teilchen in etwa 8 Tagen.
Es kann aber auch wesentlich eher oder wesentlich später zerfallen.
Die nebenstehende Tabelle zeigt, wie viele Jod-131-Teilchen von 1000 Teilchen zu Beginn nach einer bestimmten Anzahl von Tagen noch existieren.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Jod-131-Teilchen, das am 6. Tag noch vorhanden ist, auch am 12. Tag noch als Jod-Teilchen vorhanden ist.

Tage	Jod-131-Teilchen
0	1000
1	918
2	842
3	773
4	709
5	651
6	597
7	548
8	503
9	461
10	423
11	388
12	356
13	327
14	300
15	275
16	253
17	232
18	213
19	195
20	179

Berechnung wie an den Sterbetafeln geübt:

Am 6. Tag sind noch 597 Jod-Teilchen vorhanden. Am 12. Tag sind es nur noch 356. Der Anteil der Jodteilchen, die von den 597 Jod-Teilchen (entspicht 100%) noch am 12. Tag vorhanden sind, berechnet sich also zu $\frac{356}{597}\approx 0{,}596$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also etwa 59,6%.

In der Physik würde man diese Aufgabe so lösen:

$N(t)=N(0)\cdot e^{\frac{-\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}\cdot t}$ *, wobei N(t) die Anzahl der Teilchen zur Zeit t und N(0) die Anzahl der Teilchen zur Zeit 0 ist.*
$T_{\frac{1}{2}}$ *ist die Halbwertzeit, t die Mess-Zeit.*

Mit t=6d (der 6. Tag ist Tag 0, der 12. Tag ist Tag 6) gilt: $\frac{N(6)}{N(0)}=e^{\frac{-\ln 2}{8\mathrm{d}}\cdot 6\mathrm{d}}=e^{-\ln 2\cdot\frac{3}{4}}\approx 0{,}595$

7 Die Statistik einer Eliteschule zeigt, dass 25% der Schüler nicht den Abschluss schaffen. Von diesen Schülern ohne Abschluss waren 80% für diese Eliteschule nicht empfohlen worden. Von den erfolgreichen Abgängern waren 4% nicht für die Schule empfohlen worden. Berechnen Sie, welcher Anteil der Schüler, die eine Empfehlung erhalten hatten, dann auch die Schulausbildung mit Erfolg abgeschlossen haben.

Aufstellen einer Vier-Felder-Tafel:

Die Zahlen links geben die Reihenfolge der Berechnung an. Die Zahlen rechts sind Prozentwerte.

E steht für „empfohlen" und A für „Abschluss".

	E	-E	
A	7 75-3=72	6 75*4/100=3	5 100-25=75
-A	4 25-20=5	3 25*80/100=20	2 25
	8 72+5=77	9 3+20=23	1 100

Gesucht ist $p_E(A)$ *. Aus der Tabelle liest man ab* $p(E)=77$; $p(E\cap A)=72$.

Es gilt (Multiplikationssatz für Baumdiagramme): $p(E)\cdot p_E(A)=p(E\cap A)$

Also gilt $p_E(A)=\frac{p(E\cap A)}{p(E)}=\frac{72}{77}\approx 0{,}935$ *. In etwa 93,5% aller Fälle wird also einem für die Schule empfohlenen Schüler auch der Abschluss an der Schule gelingen.*

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!