Lösung

1 Die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\sin x-x+1$ besitzt eine Nullstelle, die man nicht exakt bestimmen kann.
Berechnen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren die Nullstelle näherungsweise.
Wählen Sie als Startwert $x_0=1$.
Geben Sie den Rekursionsterm an, mit dem Sie die Näherung berechnen und geben Sie die Näherungen x_2, x_3 und x_4 an.

Rekursionsformel zum Newtonschen Näherungsverfahren: $x \leftarrow x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

Wegen $f(x)=\sin x-x+1$ *gilt* $f'(x)=\cos x-1$.

Die Rekursionsformel ergibt sich in diesem speziellen Fall zu

$$x \leftarrow x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{\sin x-x+1}{\cos x-1}=\frac{x\cdot\cos x-x-\sin x+x-1}{\cos x-1}=\frac{x\cdot\cos x-\sin x-1}{\cos x-1}$$

$$x_0=1$$

$$x_1=\frac{x_0\cdot\cos x_0-\sin x_0-1}{\cos x_0-1}=\frac{1\cdot\cos 1-\sin 1-1}{\cos 1-1}\approx 2{,}83$$

$$x_2=\frac{x_1\cdot\cos x_1-\sin x_1-1}{\cos x_1-1}=\frac{2{,}83\cdot\cos 2{,}83-\sin 2{,}83-1}{\cos 2{,}83-1}\approx 2{,}05$$

$$x_3=\frac{x_2\cdot\cos x_2-\sin x_2-1}{\cos x_2-1}=\frac{2{,}05\cdot\cos 2{,}05-\sin 2{,}05-1}{\cos 2{,}05-1}\approx 1{,}94$$

$$x_4=\frac{x_3\cdot\cos x_3-\sin x_3-1}{\cos x_3-1}=\frac{1{,}94\cdot\cos 1{,}94-\sin 1{,}94-1}{\cos 1{,}94-1}\approx 1{,}93$$

Anmerkung: Gerechnet wurde mit Taschenrechnergenauigkeit, die Angaben sind gerundet

---

2 Beweisen Sie folgende Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion.

a) $4+10+16+22+\ldots+(6n-2)=3n\cdot\left(n+\frac{1}{3}\right)$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Induktionsbeginn: Ist die Behauptung für ein bestimmtes n gültig?

n=1: $4\overset{?}{=}3\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=3+1=4$ ✓

Induktionsschluss:

Annahme: Es gilt die Formel für n=k: $4+10+16+22+\ldots+(6k-2)=3k\cdot\left(k+\frac{1}{3}\right)$

Zu zeigen ist, dass dann die Formel auch für n=k+1 gilt:

$$4+10+16+22+\ldots+(6k-2)+(6(k+1)-2)=3\cdot(k+1)\cdot\left((k+1)+\frac{1}{3}\right)$$

Umformung linke Seite:

$$4+10+16+22+\ldots+(6k-2)+(6(k+1)-2) \overset{\text{wegen Annahme}}{=} 3k\cdot\left(k+\frac{1}{3}\right)+(6(k+1)-2)=3k^2+k+6k+6-2$$

Umformung rechte Seite:

$$3\cdot(k+1)\cdot\left((k+1)+\frac{1}{3}\right)=(3k+3)\cdot\left(k+\frac{4}{3}\right)=3k^2+4k+3k+4$$

Zusammenfassung linke Seite: $3k^2+k+6k+6-2=3k^2+7k+4$

Zusammenfassung rechte Seite: $3k^2+4k+3k+4=3k^2+7k+4$

Da die beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen, ist auch der Induktionsschluss erfüllt.
Die angegebene Formel ist also gültig.

b) n^3-n mit $n\in\mathbb{N}$ wird geteilt durch 6.

Induktionsbeginn:

n=1: $1^3-1=1-1=0$ *Da 0 durch 6 ohne Rest geteilt werden kann, ist der Induktionsbeginn erfüllt.*

Induktionsschluss:

Annahme: Die Behauptung gilt für n=k: k^3 - k ist durch 6 teilbar.

Zu zeigen ist: Die Behauptung gilt dann auch für n=k+1: $(k+1)^3$ - (k+1) ist durch 6 teilbar.

$$(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1=(k^3-k)+(3k^2+3k)=(k^3-k)+3\cdot k\cdot(k+1)$$

Beim rechten Term ist die Klammer links wegen der Annahme durch 6 teilbar.

Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist (wegen 6=2·3).

Der Summand $3\cdot k\cdot(k+1)$ *ist durch 6 teilbar, weil er*
1. durch 3 teilbar ist (Faktor 3) und
2. auch durch 2 teilbar ist (k und k+1 sind aufeinander folgende Zahlen, womit eine der Zahlen gerade ist, also durch 2 teilbar ist).

Die Behauptung ist also richtig.

Anmerkung: Der Beweis lässt sich auch direkt (ohne vollständige Induktion) führen: $n^3-n=n\cdot(n^2-1)=n\cdot(n-1)\cdot(n+1)$
Rechts steht das Produkt aus 3 aufeinander folgenden Zahlen (n-1 ; n ; n+1). Damit ist genau eine dieser Zahlen durch 3 teilbar und wenigstens eine der Zahlen ist durch 2 teilbar, also ist das ganze Produkt durch 6 teilbar.

---

3 Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{\sin x-\cos x}$.

Für $x\to\frac{\pi}{4}$ *gehen sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen 0.*

Es darf also die Regel von de l'Hospital angewendet werden:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x-\frac{\pi}{4}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x-(-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}707$$

---

4 a) Berechnen Sie $\int_{-2}^{2}(x^2+x-2)\,dx=$

$$\int_{-2}^{2}(x^2+x-2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{2}=\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-4\right)-\left(\frac{-8}{3}+\frac{4}{2}+4\right)=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-4-4=\frac{16}{3}-8=\frac{16-24}{3}=\frac{-8}{3}$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die im Intervall $[-2,2]$ zwischen dem Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=x^2+x-2$ und der x-Achse liegt.

Es muss untersucht werden, ob eine Nullstelle im Intervall liegt:

$$x^2+x-2=0 \;\rightarrow\; x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2} \;\rightarrow\; x_1=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2}{2}=1 \;;\; x_2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}=-2$$

Die Nullstelle x_2 stimmt mit dem Beginn des Integrationsintervalls überein, die Nullstelle x_1 liegt im Integrationsintervall. Es müssen also 2 Integrale berechnet werden.

$$\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)-\left(\frac{-8}{3}+\frac{4}{2}+4\right)=\frac{9}{3}+\frac{1}{2}-8=-5+\frac{1}{2}=-\frac{9}{2}$$

$$\int_{1}^{2}(x^2+x-2)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}=\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}=\frac{14}{6}-\frac{3}{6}=\frac{11}{6}$$

Der Flächeninhalt ergibt sich also aus $\left|-\frac{9}{2}\right|+\left|\frac{11}{6}\right|=\frac{9}{2}+\frac{11}{6}=\frac{27}{6}+\frac{11}{6}=\frac{38}{6}=\frac{19}{3}$.

c) Statt $f(x)$ wird nun die Funktionenschar $f_k(x)=x^2+x-k$ betrachtet.
Es gibt ein k, bei dem die Flächeninhalte der Flächen im Intervall $[-2,2]$ zwischen dem Graphen von f_k und der x-Achse oberhalb und unterhalb der x-Achse gleich groß sind.
Berechnen Sie diesen k-Wert.

Ist der Wert des Integrals gleich 0, so haben sich die Werte für die negativ orientierten Flächen und die Werte für die positiv orientierten Flächen gegenseitig aufgehoben, d. h. die Flächenanteile unterhalb und oberhalb der x-Achse sind gleich groß.

Zu bestimmen ist also der k-Wert in der Gleichung $\int_{-2}^{2}(x^2+x-k)\,dx=0$.

$$\int_{-2}^{2}(x^2+x-k)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-k\cdot x\right]_{-2}^{2}=\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-2k\right)-\left(\frac{-8}{3}+\frac{4}{2}+2k\right)=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-2k-2k=\frac{16}{3}-4k=0 \;\rightarrow$$

$$4k=\frac{16}{3} \;\rightarrow\; k=\frac{4}{3}$$

Die gesuchte Funktion ist also $f_{\frac{4}{3}}(x)=x^2+x-\frac{4}{3}$.

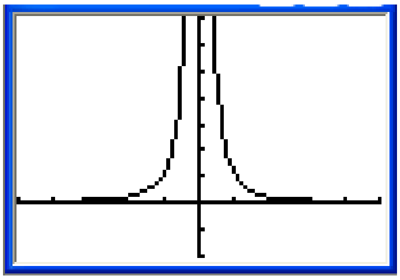
---

5 a) Untersuchen Sie mit geeigneten Methoden, ob $\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=-2$ richtig sein kann.

Formal könnte man rechnen $\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1}=(-1)-(+1)=-2$.

Nun besitzt die zu integrierende Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2}$ *aber wegen des Quadrates nur positive Funktionswerte, d. h. der Graph verläuft nur oberhalb der x-Achse, d. h. auch die Flächen zwischen dem*

Graph und der x-Achse liegen oberhalb der x-Achse. Der sich ergebende Wert des bestimmten Integrals müsste also positiv sein (da die untere Grenze des Integrals kleiner ist als die obere Grenze).



Der Widerspruch wird deutlich, wenn man sich den Graphen auf dem Taschenrechner zeichnen lässt (siehe rechts).
Die Achsen sind in Einerschritten geteilt.
Man erkennt, dass ein Rechteck (-1<x<1;0<y<1) mit dem Flächeninhalt 2 vollkommen zwischen der Kurve und der x-Achse Platz hat. Der Flächeninhalt muss also wesentlich größer als 2 und positiv sein.

Die (im Unterricht noch nicht behandelte) Erklärung ist, dass das Integral in einem Intervall, das die Stelle x=0 enthält, nicht definiert ist, weil bei x=0 kein Funktionswert existiert.

b) Berechnen Sie den Wert von $\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=$.

Auch dieses Problem (∞ als Grenze) ist neu. Es reicht für die Beantwortung, wenn man sich an die Lösung einigermaßen heran getastet hat, z.B. „Ich denke mir statt ∞ eine sehr große Zahl, rechne dann auf übliche Art und Weise das Integral aus und versuche dann heraus zu bekommen, was mit dem berechneten Wert wird, wenn die obere Grenze über alle Grenzen wächst".

Hier nun die korrekte Lösung:

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a=\lim_{a\to\infty}\left(\left(-\frac{1}{a}\right)-(-1)\right)=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{a}+1\right)=0+1=1$$

Viel Erfolg bei der
Bearbeitung der Aufgaben!