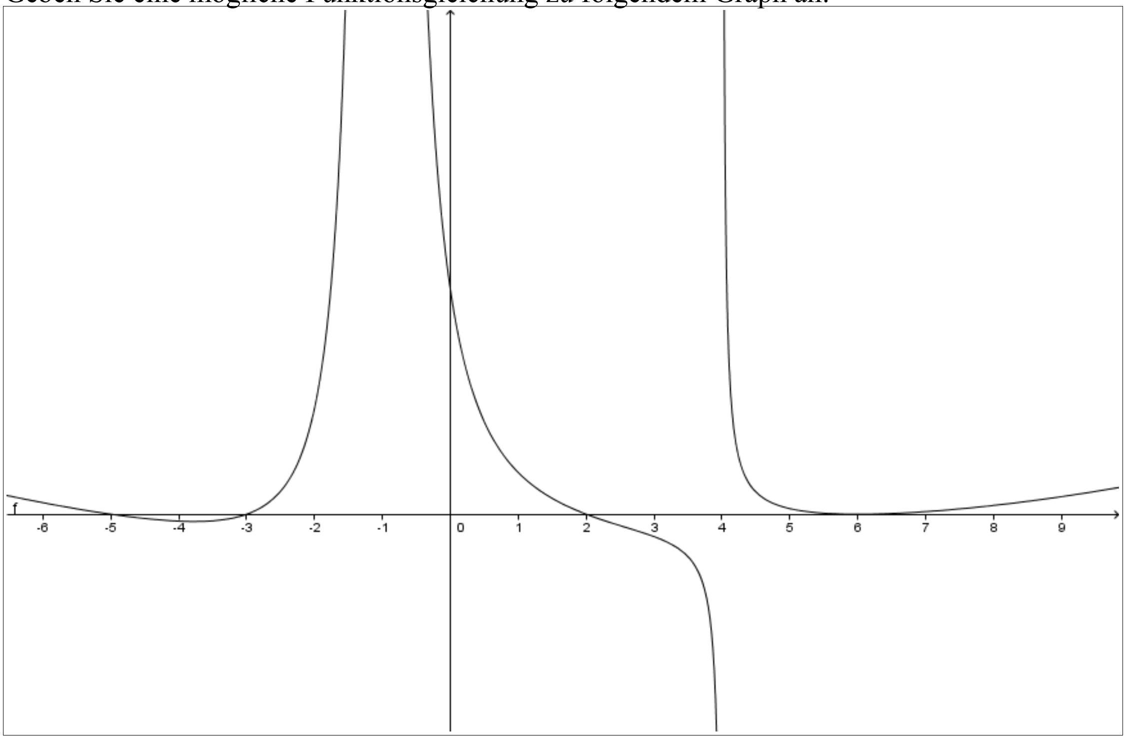
*Lösung*

1 Berechnen Sie von $f(x)=4-3x$ mit Hilfe des Differenzenquotienten die 1. Ableitung.

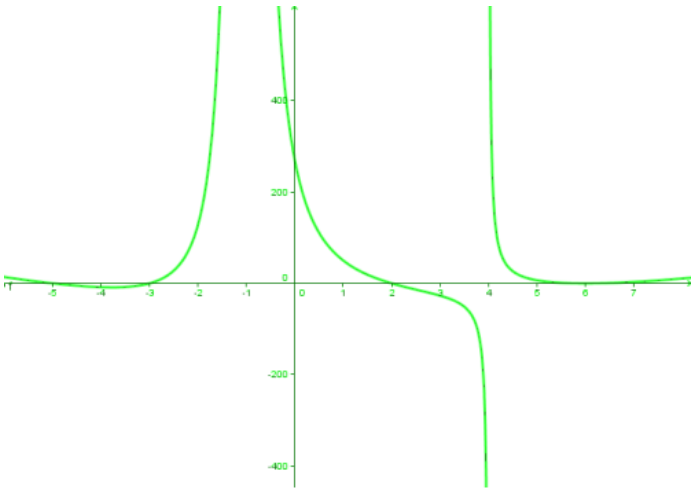
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(4-3x)-(4-3x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-3x+3x_0}{x-x_0}=-3\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=-3\cdot 1=-3$$

2 Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung zu folgendem Graph an:




*Eine mögliche Funktionsgleichung ist* $f(x)=\dfrac{(x+5)(x+3)(x-2)(x-6)^2}{(x+1)^2(x-4)}$

*Zur Kontrolle:*



3 Zeigen Sie durch Rechnung (Bedingung für Symmetrie), dass die Funktion mit der Gleichung $f(x)=2x^2-8x+1$ symmetrisch zu einer Senkrechten bei x=2 ist.

*Bei der geforderten Symmetrie muss gelten* $f(x)=f(-x+2u)$ *mit u=2.*

$f(-x+2u)=f(-x+4)=2\cdot(-x+4)^2-8\cdot(-x+4)+1=2\cdot(x^2-8x+16)+8x-32+1=$

$2x^2-16x+32+8x-32+1=2x^2-8x+1=f(x)$ *w.z.z.w. oder q.e.d. („was zu zeigen war" oder „quod erat demonstrandum")*

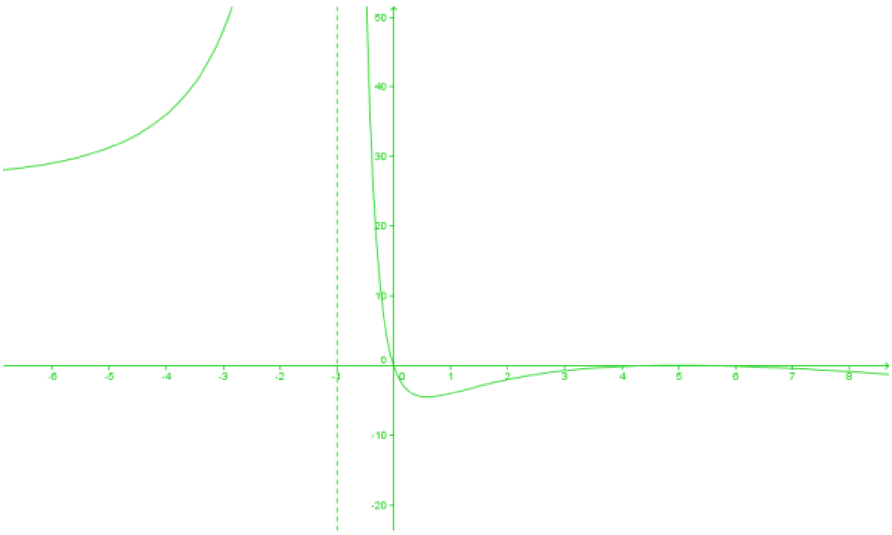
---

4 Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, deren Graph hebbare Lücken bei $x=3$ und $x=-6$ besitzt und bei dem eine senkrechte Asymptote bei $x=-1$ vorhanden ist, an der sich der Graph beidseitig ins positiv Unendliche erstreckt. Weiter soll eine Nullstelle bei $x=0$ vorliegen, bei der die x-Achse vom Graph geschnitten wird und es soll eine weitere Nullstelle bei $x=5$ existieren, bei der die x-Achse berührt aber nicht geschnitten wird.

$$f(x)=-\frac{x\cdot(x-5)^2\cdot(x-3)\cdot(x+6)}{(x+1)^2\cdot(x-3)\cdot(x+6)}$$

*Das Minuszeichen vor dem Bruchstrich ist wichtig, weil beim Pol an der Stelle x=-1 die Kurve ins positiv Unendliche gehen soll.(Ausprobieren: -1 für x einsetzen und die Vorzeichen beachten)*

*Zur Kontrolle der Graph:*




---

5 Der Graph der Funktion mit der Gleichung $f(x)=\dfrac{3x^3-2x^2+x-1}{x^2+1}$ besitzt für $x\to\pm\infty$ eine waagrechte oder schräge Asymptote oder eine andere Näherungskurve.
Berechnen Sie die Gleichung dieser Näherungsfunktion.

*Mit Polynomdivision ergibt sich:*

$$(3x^3-2x^2+x-1):(x^2+1)=3x-2+\frac{-2x+1}{x^2+1}$$

$\underline{3x^3+3x}$

$-2x^2-2x-1$

$\underline{-2x^2-2}$

$-2x+1$

*Es liegt also eine schräge Asymptote mit der Funktionsgleichung* $g(x)=3x-2$ *vor.*

6 Gegeben ist eine Funktionsschar mit der Gleichung $f_k(x)=\frac{x-k^2}{x^2+k}$.

a) Finden Sie durch Rechnung den Bereich der x-Werte heraus, an denen die Funktionsschar Nullstellen hat.

*Für Nullstellen gilt die Bedingung $f(x)=0$.*

$$f_k(x)=\frac{x-k^2}{x^2+k}=0 \;\rightarrow\; x-k^2=0 \;\rightarrow\; x=k^2$$

*k kann alle Werte aus $\mathbb{R}$ annehmen. Da k quadriert wird, ist der Wert von x immer positiv.*
*Es gilt also $x\in[0,\infty)$.*

b) Geben Sie den Bereich der k-Werte an, für den die Funktionsschar waagrechte Tangenten besitzt.

*Für waagrechte Tangenten gilt die Bedingung $f'(x)=0$.*

$$f_k'(x)\overset{\text{Quotientenregel}}{=}\frac{1\cdot(x^2+k)-(x-k^2)\cdot 2x}{(x^2+k)^2}=\frac{x^2+k-2x^2+2k^2x}{(x^2+k)^2}=\frac{-x^2+2k^2x+k}{(x^2+k)^2}\overset{!}{=}0 \;\rightarrow$$

$$x^2-2k^2x-k=0 \;\rightarrow\; x_{1,2}=k^2\pm\sqrt{k^4+k}$$

*Waagrechte Tangenten kann es nur geben, wenn der Wert unter der Wurzel größer oder gleich 0 ist:*

$$k^4+k\geq 0 \;\rightarrow\; k\cdot(k^3+1)\geq 0$$

*Die Vorzeichen der Faktoren auf der linken Seite ändern sich beim Durchlaufen der k-Werte, wenn sie den Wert 0 annehmen. Das ist bei $k=0$ und bei $k=-1$ der Fall.*

*1. Bereich: $k<-1$ :*
*Links stehen zwei negative Faktoren, die als Ergebnis eine positive Zahl ergeben. Die Bedingung ist also erfüllt und es gibt in diesem Bereich waagrechte Tangenten.*

*2. Bereich: $-1<k<0$ :*
*Der erste Faktor ist negativ, der zweite Faktor aber positiv, d.h. die Bedingung ist nicht erfüllt. In diesem Bereich existieren also keine waagrechten Tangenten.*

*3. Bereich: $k>0$ :*
*Beide Faktoren sind positiv. Die Bedingung ist also erfüllt und es existieren für x>0 waagrechte Tangenten.*

*Die Grenzfälle $k=-1$ und $k=0$ müssen gesondert betrachtet werden:*

$$k=-1 \;\rightarrow\; f_{-1}(x)=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$$

*Hier liegt eine um -1 in x-Richtung verschobene Hyperbel vor, die keine waagrechten Tangenten besitzt.*

$$k=0 \;\rightarrow\; f_0(x)=\frac{x-0}{x^2+0}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$$

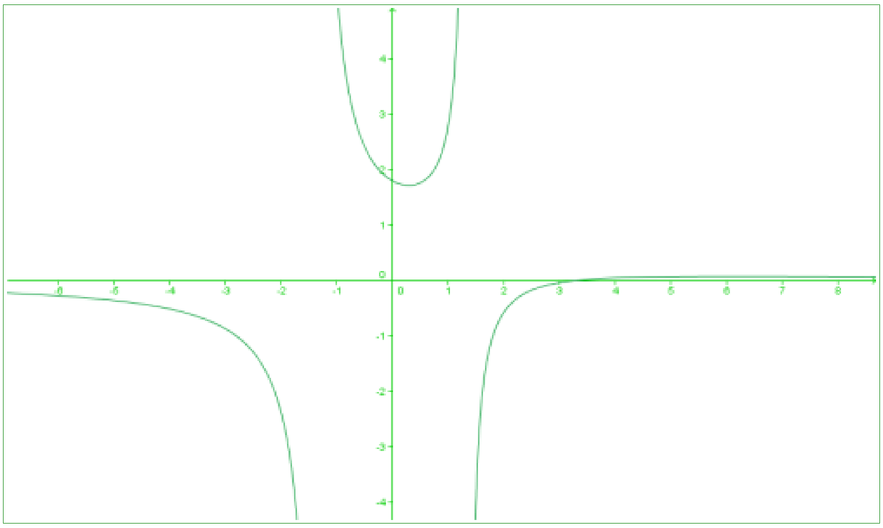
*Hier liegt eine Normal-Hyperbel vor, die keine waagrechten Tangenten besitzt.*

c) Bei variierendem k lassen sich Bereiche angeben, in denen der Funktionsgraph jeweils sehr ähnlich aussieht, sich aber vom Aussehen in den anderen Bereichen deutlich unterscheidet.
Geben Sie jeweils die Grenzen dieser Bereiche an,
skizzieren Sie jeweils einen typischen Graph aus jedem Bereich und
skizzieren Sie die Graphen, die zu den k-Werten gehören, die die Grenzen zwischen den Bereichen bilden.

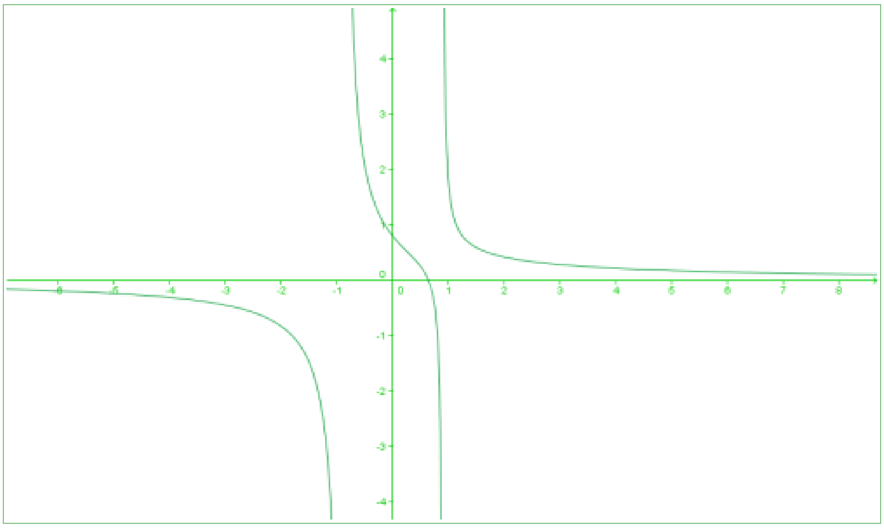
*Neben Nullstellen und waagrechten Tangenten kann das Vorhandensein von Polen stark auf den Kurvenverlauf einwirken. Am Nenner $x^2+k$ erkennt man, dass Pole nur für $k\leq 0$ existieren können, da der Nenner nur für diese Werte zu 0 werden kann. Ein „kritischer“ Grenzwert für die Bereiche ist also für Pole wie bei den wagrechten Tangenten der Wert 0.*

*Die nun notwendiger Weise zu erfolgende Fallunterscheidung wurde schon im Aufgabenteil b) erledigt.*
*Hier typische Graphen für die 3 Bereiche:*

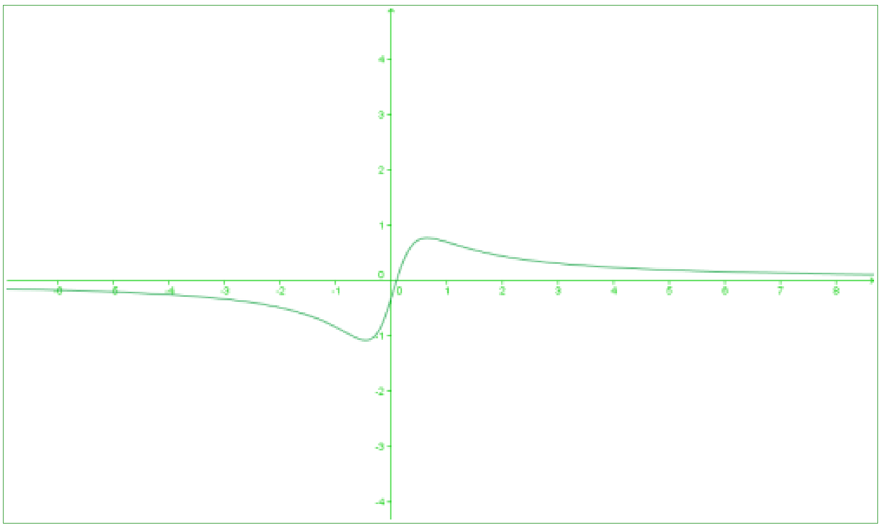
$k<-1$ :



$-1<k<0$ :

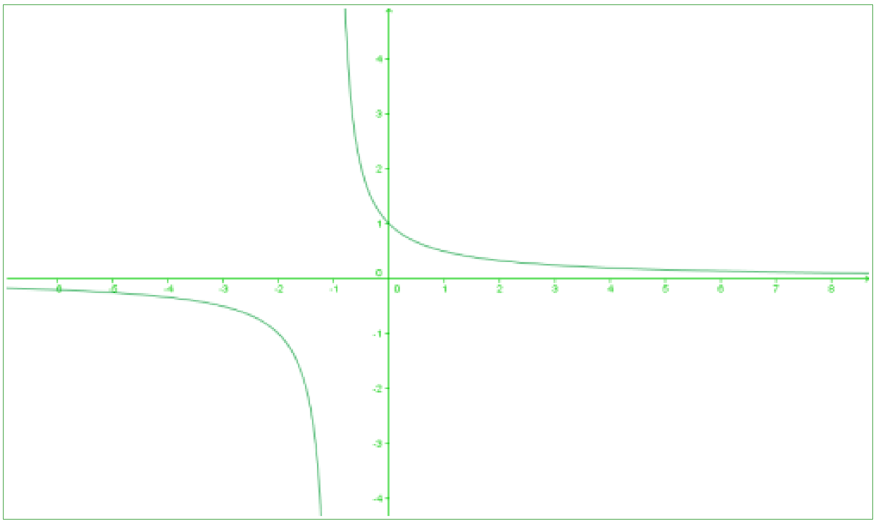


$0<k$ :

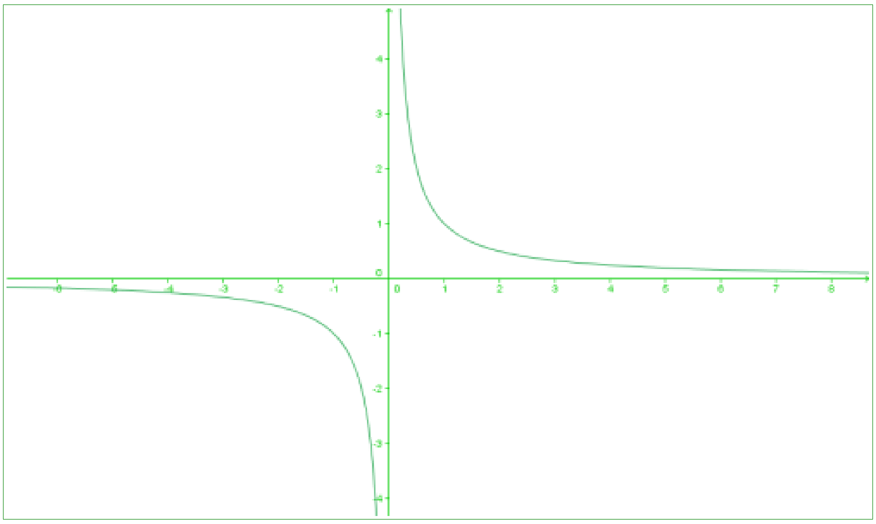


*Und hier die Graphen der Spezialfälle:*

$k=-1$ :



$k=0$ :



---

Die Formeln zur Symmetrie als Ergänzung zur Formelsammlung:

Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(x)=f(-x)$

Punktsymmetrie zum Punkt $(0/0)$ : $f(x)=-f(-x)$

Achsensymmetrie zur Achse $x=u$ : $f(x)=f(-x+2u)$

Punktsymmetrie zum Punkt $(u/v)$ : $f(x)=-f(-x+2u)+2v$

| Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben! |
|---|