2008-06-06 Klausur 3 Kurs 12ma4-g Mathematik

Lösung *Version 2008-06-07*

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

1 Die Teilaufgaben beziehen sich auf ein Roulette-Spielfeld.

a) Ein Feld wird durch den Spielleiter ausgewählt. Dadurch ist eine Spalte und eine Reihe festgelegt.
Ohne zu wissen, welches Feld bestimmt wurde, legt der Spieler ein Feld fest. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sich das Feld in der festgelegten Reihe oder der festgelegten Spalte befindet.

Es gibt insgesamt 36 Felder. 1 Reihe hat 3 Felder, eine Spalte 12 Felder. Da jede Reihe mit jeder Spalte genau 1 Feld gemeinsam haben, sind durch die Wahl eines Feldes 3+12-1=14 Felder ausgewählt.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also nach Laplace: $p=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$.

b) Der Spieler sagt 3 Ergebnisse voraus (es wird 3-mal eine Kugel geworfen, die dann jeweils einen Wert von 1 bis 36 festlegt).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler wenigstens 1-mal richtig geraten hat.

Es gilt $p(\text{wenigstens 1 richtig})=1-p(0\,\text{richtig})$

$p(0\,\text{richtig})=\frac{35}{36}\cdot\frac{35}{36}\cdot\frac{35}{36}=0{,}919$

also: $p(\text{wenigstens 1 richtig})=1-0{,}919=0{,}081$

Man wird also in ca. 8,1% aller Fälle wenigstens ein Ergebnis richtig geraten haben.

c) Der Spielleiter wählt 10 Felder aus und hinterlegt die Wahl in einem verschlossenen Umschlag. Der Spieler wählt ebenfalls 10 Felder aus. Hat er genau 6 Felder richtig geraten (nicht mehr und nicht weniger), erhält er einen Preis.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Spieler den Preis erhält.

Man teilt die Menge aller Felder in die „richtigen“ (10 Stück) und die „falschen“ (26 Stück) auf. Von den „richtigen“ Feldern wählt der Spieler 6, von den „falschen“ nur 4. Es findet „Ziehen mit einem Griff“ statt.

$\frac{\binom{10}{6}\cdot\binom{26}{4}}{\binom{36}{10}}=\frac{210\cdot 14950}{254186856}=0{,}01235$ *Der Spieler erhält den Preis in etwa 1,2% aller Fälle.*

2 Bei einer naturwissenschaftlichen Studienfahrt werden die Ziele München und Toscana angefahren. 25% der München-Teilnehmer(innen) sind weiblich. In die Toscana wollen 40% der männlichen Teilnehmer fahren. 60% des gesamten Jahrgangs fahren in die Toscana.

Erstellen Sie zu diesem Text eine 4-Felder-Tafel und ermitteln Sie daraus, wie viel Prozent der Fahrtteilnehmer(innen) weiblich sind.

Arbeitsblatt

	A	B	C	D
1		weiblich	männlich	
2	München	0,25·0,4=0,1	0,4-0,1=0,3(=100%-40%=60%)	1-0,6=0,4
3	Toscana	0,6-0,2=0,4	0,5-0,3=0,2	0,6
4		0,1+0,4=0,5	0,3/60·100=0,5 (siehe C2)	1

Ergebnis

	weiblich	männlich	
München	0,1	0,3	0,4
Toscana	0,4	0,2	0,6
	0,5	0,5	1

50% der Teilnehmer sind weiblich.

3 Beim Mathematik-Känguru-Wettbewerb werden 30 Aufgaben gestellt. Für jeweils 10 Aufgaben gibt es 3, 4 und 5 Punkte. Zur Lösung muss man bei jeder Aufgabe eines von fünf Feldern ankreuzen.

a) Berechnen Sie, wie viel Punkte man erwarten kann, wenn man beim Ausfüllen des Lösungszettels nur rät.

Die Wahrscheinlichkeit, eine Lösung richtig zu raten, beträgt bei 5 Auswahlmöglichkeiten p=0,2.
Die Zufallsgröße ist die Punktzahl, die es für die richtig gelöste Aufgabe gibt.
Der Erwartungswert berechnet sich aus $\mu=k\cdot p$.
Für k=3 ergibt sich $\mu_{3,1}=3\cdot 0{,}2=0{,}6$. Bei 10 Aufgaben mit 3 Punkten ist dann $\mu_{3,10}=10\cdot 0{,}6=6$.
Analog ergeben sich für k=4 und k=5 die μ-Werte $\mu_{4,10}=10\cdot 4\cdot 0{,}2=8$ und $\mu_{5,10}=10\cdot 5\cdot 0{,}2=10$.
Insgesamt folgt daraus $\mu=\mu_{3,10}+\mu_{4,10}+\mu_{5,10}=6+8+10=24$

Alternativ kann man die Lösung natürlich auch etwas umfangreicher mit Listen oder Tabellen finden (siehe rechts).

	A	B	C	D
1	Aufgabe	k	p	k·p
2	1	3	0,2	0,6
3	2	3	0,2	0,6
4	3	3	0,2	0,6
5	4	3	0,2	0,6
6	5	3	0,2	0,6
7	6	3	0,2	0,6
8	7	3	0,2	0,6
9	8	3	0,2	0,6
10	9	3	0,2	0,6
11	10	3	0,2	0,6
12	11	4	0,2	0,8
13	12	4	0,2	0,8
14	13	4	0,2	0,8
15	14	4	0,2	0,8
16	15	4	0,2	0,8
17	16	4	0,2	0,8
18	17	4	0,2	0,8
19	18	4	0,2	0,8
20	19	4	0,2	0,8
21	20	4	0,2	0,8
22	21	5	0,2	1
23	22	5	0,2	1
24	23	5	0,2	1
25	24	5	0,2	1
26	25	5	0,2	1
27	26	5	0,2	1
28	27	5	0,2	1
29	28	5	0,2	1
30	29	5	0,2	1
31	30	5	0,2	1
32				
33			μ=	24

b) Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, nur durch Raten mehr als 10 Aufgaben richtig gelöst zu haben.

Hier geht es nicht um die Punkte, die für die Aufgaben gegeben werden, sondern nur um die richtigen Antworten auf die Aufgaben. Da die Ratewahrscheinlichkeit für jede Aufgabe gleich ist und die Aufgaben unabhängig voneinander gelöst werden können („Ziehen mit Zurücklegen“), können wir mit der Binomialverteilung rechnen:

L1	L2	L3 1
6	.60697	
7	.76079	
8	.87135	
9	.93891	
10	.97438	
11	.99051	
12	.99689	

L1(11) =10

n=30; p=0,2; k>10; Tabelle mit kumulierter Wahrscheinlichkeit: binomcdf(30,0.2);

$$p(k>10)=1-p(k\le 10)=1-0{,}97438=0{,}02562$$

Die Wahrscheinlichkeit, mehr als 10 Aufgaben nur durch Raten zu lösen, beträgt etwa 2,6%.

---

4 Von den 28 Schülern eines Mathematikkurses sind üblicherweise 75% bei einer Mathematikarbeit erfolgreich. Der Lehrer behauptet nun, dass bei Sonnenschein 95% der Schüler erfolgreich sind und dass er deshalb nur bei Sonnenschein Arbeiten schreiben lassen will (vergleiche Spoerl/Reimann: Die Feuerzangenbowle).

Nun waren bei der nächsten Sonnenschein-Arbeit 25 Schüler erfolgreich.

a) Kann die Hypothese des Lehrers bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% angenommen werden?

In nebenstehender Bildschirmkopie befindet sich in L2 die kumulierte Binomialverteilung für n=28 und p=0,95 und in L3 für n=28 und p=0,75.

L1	L2	L3 1
23	.01171	.86461
24	.04907	.94486
25	.16266	.98339
26	.41169	.99672
27	.76217	.99968
28	1	1
------	------	------

L1(26) =25

Aus α=0,05 folgt mit der Hypothese (p=0,95): Annahmebereich={25,26,27,28}.

Da 25 Schüler erfolgreich waren, kann man mit 5%-er Fehlerwahrscheinlichkeit die Hypothese p=0,95 annehmen.

b) Erläutern Sie, was man in diesem Beispiel unter einem Fehler 2. Art verstehen kann und berechnen Sie den Fehler 2. Art.

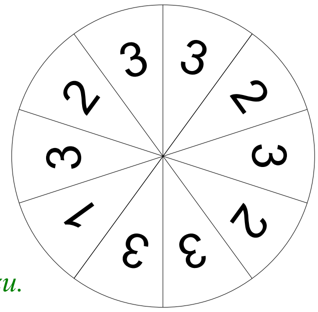
Einen Fehler 2. Art begeht man, wenn sich im Versuch, wie hier, ein Wert aus dem Annahmebereich ergibt, in Wirklichkeit aber die Hypothese p=0,95 nicht zutrifft.
Falls p=0,95 falsch ist, gilt in diesem Fall p=0,75 (Werte in L3). β, der Fehler 2. Art, ergibt sich aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten für die k-Werte von 25 bis 28:

$\beta=p(X\ge 25)=1-p(X\le 24)=1-0{,}94486=0{,}05514$ *Der Fehler 2. Art beträgt also etwa 5,5%.*

---

5 Zu nebenstehendem Glücksrad gibt es folgenden Gewinnplan:
Bei einer 1 gewinnt man 5 €, bei einer 2 noch 3 € und bei einer 3 nur 1 €.

Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung für den Gewinn.



Zufallsvariable X ist der Gewinn.
Es gibt 1-mal die „1“, 3-mal die „2“ und 6-mal die „3“.

Insgesamt sind es 10 Felder; jedem Feld kommt also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ *zu.*

Berechnung der gesuchten Größen in Tabellenform:

Zahl	k	p(X=k)	k·p(X=k)	k-µ	(k-µ)²	(k-µ)²·p(X=k)
1	5	0,1	0,5	3	9	0,9
2	3	0,3	0,9	1	1	0,3
3	1	0,6	0,6	-1	1	0,6
		µ=	2		V=	1,8

Lösungen: Erwartungswert µ=2; Varianz V=1,8; Standardabweichung σ=1,34

---

6 Berechnen Sie für einen Bernoulli-Versuch mit n=153 und p=0,4 die k-Werte, die in einer 2σ-Umgebung um den Erwartungswert herum liegen.

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 153 \cdot 0{,}4 = 61{,}2$.

Varianz: $V = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p) = 153 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 36{,}72$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{153 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{36{,}72} = 6{,}06 \rightarrow 2\sigma = 12{,}12$

Gesucht sind die k-Werte, die zwischen µ-2σ und µ+2σ liegen,
also zwischen $61{,}2 - 12{,}12 = 49{,}08$ *und* $61{,}2 + 12{,}12 = 73{,}32$.
Die gesuchten k-Werte sind also:
{50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73}

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!