2008-02-22 Klausur 2 Kurs 12Ma4-g Mathematik

Lösung *Version 2008-03-12*

1 Berechnen Sie die Werte für a, b und λ: $\begin{pmatrix} a \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ -4 \end{pmatrix}$

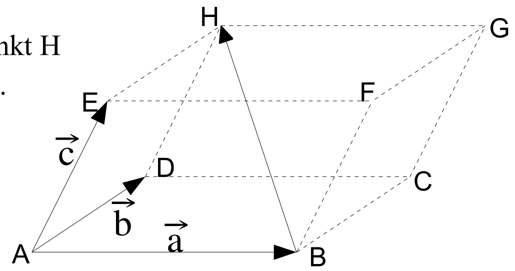
3. Komponente: $4+\lambda\cdot(-2)=4 \rightarrow -2\cdot\lambda=-8 \rightarrow \lambda=4$

Einsetzen in 2. Komponente: $5+4\cdot 3=5+12=17=b$

Einsetzen in 1. Komponente: $a+4\cdot(-1)=-1 \rightarrow a-4=-1 \rightarrow a=3$

---

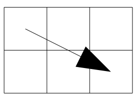
2 Beschreiben Sie den Vektor, der den Punkt B mit dem Punkt H verbindet, durch einen Term mit den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.



$\overrightarrow{BH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

---

3 Den Zug eines Springers auf dem Schachbrett kann man durch eine Verschiebung angeben (2 Felder in eine Richtung, dann 1 Feld in die dazu senkrechte Richtung).

Beispiel:  hier liegt die Verschiebung $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vor.

		4					
				3			
			5				
					2		
		6					
				1			

Auf dem Spielfeld startet ein Springer auf dem Feld mit der 1 und zieht dann den Zahlen entsprechend weiter um schließlich wieder auf dem Feld 1 stehen zu bleiben.
Beschreiben Sie die Zugfolge durch Vektoren, addieren Sie diese Vektoren und interpretieren Sie die Bedeutung dieses Ergebnisses für den Springer.

$\overrightarrow{12}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{23}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{34}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{45}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{56}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{61}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *bedeutet, dass keine Verschiebung stattfindet (0 Schritte in x-Richtung und 0 Schritte in y-Richtung). Das ist auch sinnvoll, da Start und Ziel identisch sind.*

---

4 10 Heftzwecken werden 5-mal geworfen. Jedes Mal wird registriert, wie oft die Lagen $\perp$ und $\wedge$ auftreten.

Erläutern Sie an Hand dieses Versuchs die Begriffe „Wahrscheinlichkeit“, „relative Häufigkeit“ und „absolute Häufigkeit“.

Geben Sie auch mit Begründung einen Wert für die Wahrscheinlichkeit an.

Versuch	$\perp$	$\wedge$
1	3	7
2	6	4
3	5	5
4	3	7
5	4	6

Beim 1. Versuch trat 3-mal das Ergebnis $\perp$ und 7-mal das Ergebnis $\wedge$ auf.
3 und 7 sind hier die absoluten Häufigkeiten H.
Die absolute Häufigkeit H gibt an, wie oft ein bestimmtes Ergebnis im Versuch erzielt wurde.

Aussagekräftiger ist oft die relative Häufigkeit h, die angibt, wie oft ein bestimmtes Ergebnis in Bezug auf die Anzahl n aller Ergebnisse eingetreten ist. Es gilt deshalb: $h = \frac{H}{n}$

Im 1. Versuch gilt $h(\perp) = \frac{3}{10}$ *und* $h(\wedge) = \frac{7}{10}$

Die Wahrscheinlichkeit p ist eine reine Zahl und soll angeben, mit welcher relativen Häufigkeit ein bestimmtes Ergebnis in einem Zufallsversuch auftreten wird.
Prinzipiell ist diese Zahl p frei wählbar zwischen 0 und 1, aber wenn man möchte, dass die Zahl p aussagekräftig ist, wird man sie so wählen, dass sie mit der relativen Häufigkeit bei sehr großem Stichprobenumfang („empirisches Gesetz der großen Zahlen“) übereinstimmt.

Statt also die Wahrscheinlichkeiten für die 2 Ergebnisse mit p = 0,3 und p = 0,7 so zu wählen wie die relativen Häufigkeiten im 1. Versuch, wird man die weiteren Versuche mit berücksichtigen.

In den 5 Versuchen mit zusammen 50 geworfenen Heftzwecken tritt $\perp$ 21-mal auf und $\wedge$ 29-mal.
Die relativen Häufigkeiten betragen also bei 50 geworfenen Heftzwecken $h(\perp) = \frac{21}{50}$ *und* $h(\wedge) = \frac{29}{50}$.
Da diese Werte in anderen Versuchen variieren könnten, könnte man hier für die Wahrscheinlichkeiten geringfügig gerundete Werte verwenden: $p(\perp) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ *und* $p(\wedge) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

---

5 Ein Skatblatt umfasst 32 Karten mit den „Farben“ Kreuz, Pik, Herz und Karo und jeweils den „Werten“ 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, As.
Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, eine Dame-Karte oder eine Herz-Karte zu ziehen, wenn man eine einzelne Karte zufällig aus dem Kartenstapel zieht.

Es gibt 4 Damen-Karten und 8 Herz-Karten. Da bei dieser Zählung aber die Herz-Dame doppelt gezählt wird, ist die Gesamtzahl der Gewinn.-Karten nicht 12 sondern 11.

Die Wahrscheinlichkeit für Dame oder Herz beträgt also p(Dame oder Herz) = $\frac{11}{32}$.

---

6 Man würfelt mit einem Würfel W6 (d. h. der Würfel hat 6 Flächen, die mit den Zahlen von 1 bis 6 beschriftet sind).
Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei 6-maligem Werfen mindestens 1-mal die 6 zu erhalten.

Da es sehr umständlich ist, die Wahrscheinlichkeiten p(1-mal 6), p(2-mal 6), p(3-mal 6), p(4-mal 6), p(5-mal 6) und p(6-mal 6) zu berechnen, wird man zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis p(0-mal 6) berechnen und daraus das Ergebnis herleiten:

$$p(mindestens\ 1\ mal\ 6\ bei\ 6\ Würfen)=1-p(0\ mal\ 6\ bei\ 6\ Würfen)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6=1-\frac{15625}{46656}=\frac{31031}{46656}\approx 0{,}665$$

---

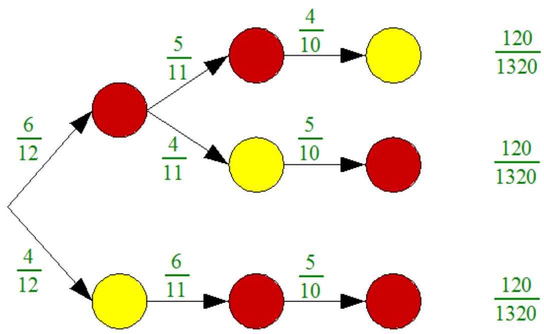
7 In einer Urne befinden sich 6 rote, 4 gelbe und 2 blaue Kugeln. Man zieht 3-mal je eine Kugel und legt diese Kugel dann <u>nicht</u> zurück in die Urne.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man nach dem Ziehen der 3 Kugeln 2 rote und 1 gelbe Kugel gezogen hat.
Falls Sie ein Pfaddiagramm anlegen, dürfen Sie einen reduzierten Pfad benutzen.

Es findet 3-maliges Ziehen ohne Zurücklegen statt.

reduzierter Pfad (alle Ergebnisse mit 1 blauer Kugel, 2 gelben Kugeln und 3 roten Kugeln werden ignoriert):

Die Addition der Wahrscheinlichkeiten der Einzelergebnisse beträgt $\frac{360}{1320}=\frac{3}{11}\approx 0{,}273$

Die Wahrscheinlichkeit für 2 rote und 1 gelbe Kugel beträgt also 27,3%.



---

8 2 gleichwertige Partner A und B spielen ein Glücksspiel. Wer als erster 4 Spiele gewonnen hat, erhält das gesamte Preisgeld. Nun muss beim Stand von 2:1 für A das Spiel abgebrochen werden.
Man einigt sich darauf, das Preisgeld so unter den Spielern A und B zu teilen, dass die Aufteilung der Wahrscheinlichkeit entspricht, mit der jeder gewinnen würde, wenn man die restlichen Spiele durch einen Münzwurf ersetzen würde.
Berechnen Sie, wie das Preisgeld aufgeteilt werden muss.

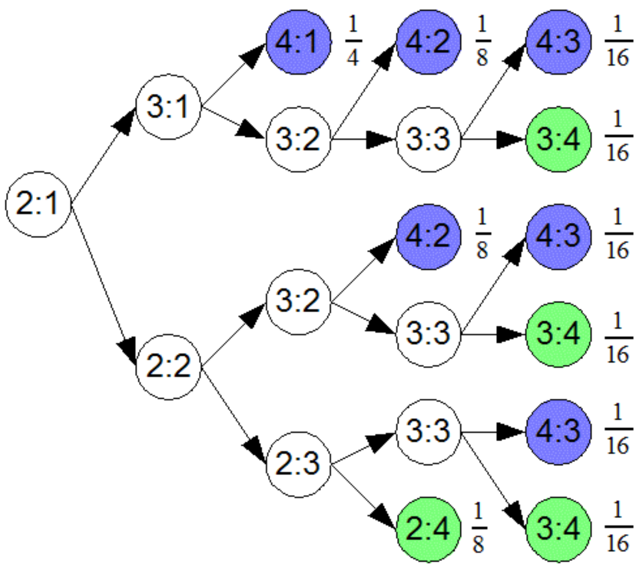
An allen Pfeilen im Pfeildiagramm muss man sich die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ *eingetragen denken.*

Aus dem Pfaddiagramm rechts liest man dann ab:

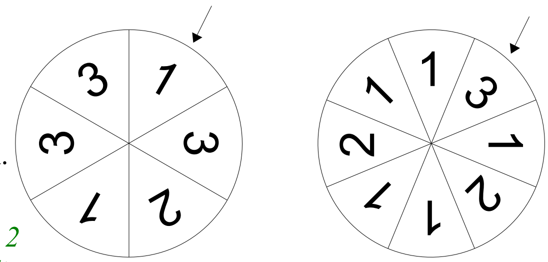
$$p(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$

$$p(B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

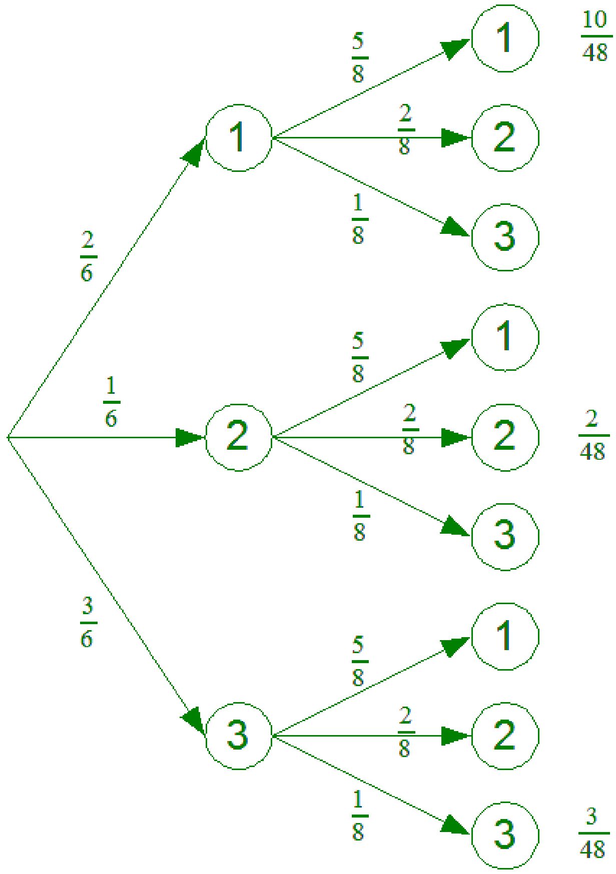
Wird das Preisgeld in 16 Teile geteilt, sollte A also 11 Teile und B 5 Teile bekommen oder anders ausgedrückt: Das Preisgeld wird im Verhältnis 11:5 geteilt.



9 Die zwei Glücksräder werden gedreht. Wenn die beiden Pfeile auf denselben Zahlenwert zeigen, hat man gewonnen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn.



Ein Pfaddiagramm wird erstellt.
Die erste Stufe gibt die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1, 2 und 3 der linken Scheibe an, die zweite Stufe bezieht sich auf die rechte Scheibe:



Rechts sind nur die Gesamtwahrscheinlichkeiten für die interessierenden Ergebnisse (11, 22, 33) angezeigt.
Insgesamt ergibt sich also die Wahrscheinlichkeit $p(11, 22, 33) = \frac{10}{48} + \frac{2}{48} + \frac{3}{38} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$ *für einen Gewinn.*

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!