1 Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit der Gleichung $f_a(x)=\frac{x+2}{x^2-a}$ mit $a\in\mathbb{R}$.

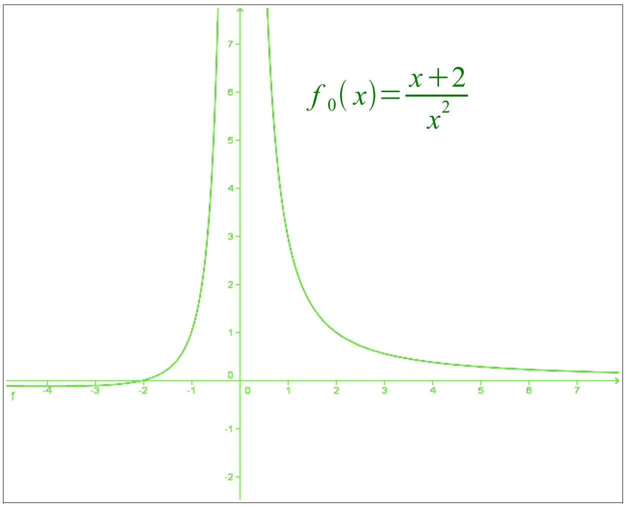
a) Untersuchen Sie die Kurvenschar für die a-Werte $a_1=0$ und $a_2=4$ und geben Sie alle Besonderheiten (Nullstellen, Pole, Lücken, Asymptoten) der beiden Funktionen f_0 und f_4 an. Zeichnen Sie auch die Graphen (aussagekräftige Skizze reicht).

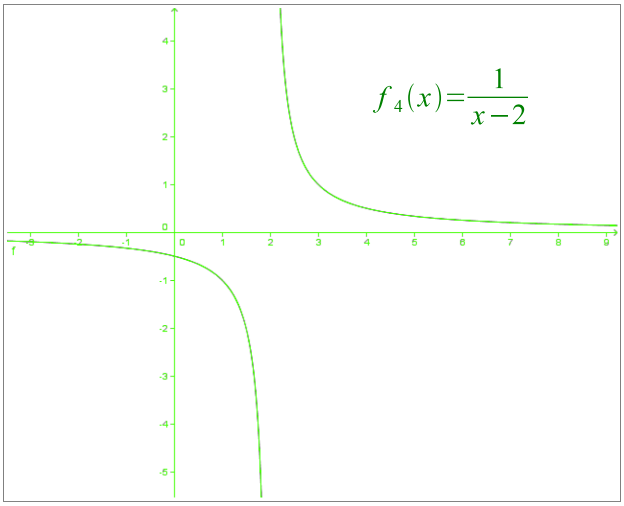
$f_0(x)=\frac{x+2}{x^2}$ *Man sieht unmittelbar:*

Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (=VZW) bei -2 (Zähler gleich 0) und
2-facher Pol ohne VZW bei 0 (Nenner gleich 0).
Lücken gibt es nicht (Zähler und Nenner nicht an derselben Stelle gleich 0).
Senkrechte Asymptote bei x=0 (Pol), waagrechte Asymptote ist die x-Achse (grad(Zähler)<grad(Nenner))

$f_4(x)=\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-2}$ *Man sieht unmittelbar:*

Keine Nullstelle (Zähler kann nicht zu 0 werden).
Pol mit VZW bei x=2 (Nenner gleich 0).
Hebbare Lücke bei x=-2 (Zähler und Nenner gleichzeitig gleich 0 in Ausgangsgleichung). $f_4(-2):=-\frac{1}{4}$
Senkrechte Asymptote bei x=2 (Pol), waagrechte Asymptote ist die x-Achse (grad(Zähler)<grad(Nenner))





b) Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von a die Kurven der Schar Extremstellen besitzen.

1. Ableitung mit Quotientenregel: $f_a'(x)=\frac{1\cdot(x^2-a)-(x+2)\cdot 2x}{(x^2-a)^2}=\frac{x^2-a-2x^2-4x}{(x^2-a)^2}=\frac{-x^2-4x-a}{(x^2-a)^2}$

$f_a'(x)=0 \rightarrow x^2+4x+a=0 \rightarrow x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-a}$

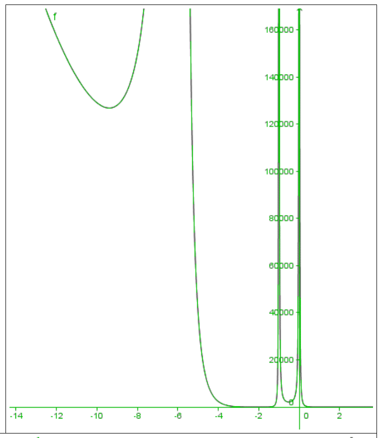
Da das Argument der Wurzel nur für $a\leq 4$ *definiert ist, kann es nur für diese a-Werte Extrema geben.*
Tatsächlich gibt es für a=4 kein Extremum, da es mit der hebbaren Lücke bei x=-2 zusammenfällt (und die Steigung an der Stelle auch nicht 0 ist).
Für a=0 gibt es nur ein Extremum, da das andere mit der Polstelle bei x=0 zusammenfällt.

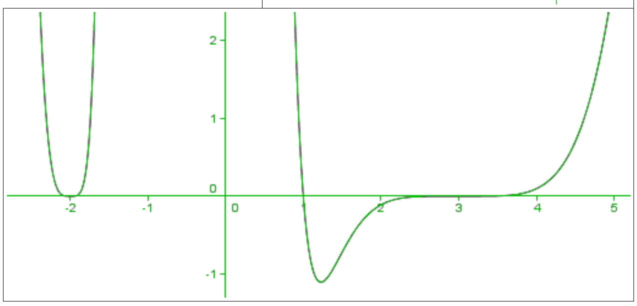
c) Gibt es einen Punkt, den jede Kurve der Schar durchläuft?
Wenn ja, berechnen Sie die Koordinaten des Punktes (bzw. der Punkte, wenn es mehrere gibt), wenn nein, geben Sie die Gründe an, die zu diesem Urteil führen.

Da jede Kurve unabhängig von a bei $x=-2$ *eine Nullstelle besitzt, läuft (fast) jede Kurve durch den Punkt* $(-2/0)$.
Eine Ausnahme bildet die Kurve mit $a=4$, *da hier die hebbare Lücke bei* $x=-2$ *liegt. Als Funktionswert für die Hebung der Lücke würde auch nicht 0, sondern* $-\frac{1}{4}$ *definiert werden müssen.*
Weitere für alle Kurven übereinstimmende Punkte gibt es nicht, da mit $a \neq b$ *gilt:*
$\frac{x+2}{x^2-a}=\frac{x+2}{x^2-b} \rightarrow \frac{1}{x^2-a}=\frac{1}{x^2-b} \rightarrow x^2-b=x^2-a \rightarrow b=a$ *und Widerspruch zur Annahme* $a \neq b$.

2

Geben Sie in Worten die Eigenschaften der Funktion $f(x)=\frac{(x-3)^5\cdot(x+2)^4\cdot(x-1)^2\cdot(x+4)\cdot x}{(x-1)\cdot(x+1)^2\cdot(x+4)\cdot x^3\cdot(x+6)^2}$ an:
Pole mit und ohne Vorzeichenwechsel, einfache oder mehrfache Nullstellen, hebbare oder nicht hebbare Lücken, Verhalten des Graphen für x→∞.





Zunächst wird der Funktionsterm vereinfacht:

$$f(x)=\frac{(x-3)^5\cdot(x+2)^4\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot x^2\cdot(x+6)^2}$$

Von links oben nach rechts unten gilt der Reihe nach:

- *5-fache Nullstelle bei x=3 mit VZW*
- *4-fache Nullstelle bei x=-2 ohne VZW*
- *1-fache Nullstelle bei x=1 als hebbare Lücke*
- *hebbare Lücke bei x=-4, zu schließen durch Funktionswert*
  $f(-4)=\frac{(-7)^5\cdot(-2)^4\cdot(-3)}{(-1)^2\cdot(-4)^2\cdot 2^2}=12605{,}25$
- *2-facher Pol bei x=-1 ohne VZW*
- *2-facher Pol bei x=0 ohne VZW*
- *2-facher Pol bei x=-6 ohne VZW*
- *grad(Nenner)=6, grad(Zähler)=10*
  f(x)→+∞ für x→±∞

3

Bestimmen Sie die Gleichung der (nicht senkrechten) Asymptote der Funktion $f(x)=\frac{2x^2-x-8}{x-4}$.

Polynomdivision:

$(2x^2-x-8):(x-4)=2x+7+\frac{20}{x-4}$
$2x^2-8x$

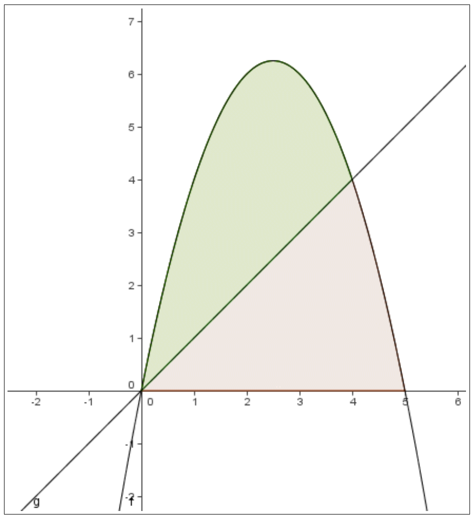
$7x-8$
$7x-28$

20

Für x→∞ geht der Term gegen 2 x + 7

Die schräge Asymptote hat deshalb die Gleichung y = 2x + 7

4 Der Graph der Parabel mit der Gleichung $f(x)=5x-x^2$ schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

Berechnung der Nullstellen und damit der Integrationsgrenzen:

$f(x)=5x-x^2=0 \;\rightarrow\; x\cdot(5-x)=0 \;\rightarrow\; x_1=0;\, x_2=5$

$$\int_0^5 (5x-x^2)\,dx=\left[\frac{5}{2}\cdot x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^5=\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)-0=\frac{125}{6}$$

Diese Fläche wird durch die Gerade mit der Gleichung $g(x)=x$ in zwei Teile geteilt.

b) Skizzieren Sie die Parabel und die Gerade im Koordinatensystem und berechnen Sie, welcher der beiden Teile der größere ist.

Berechnung des oberen grünlichen Bereichs:

Schnittpunkte der Kurven:

$5x-x^2=x \;\rightarrow\; 4x-x^2=0 \;\rightarrow\; x\cdot(4-x)=0 \;\rightarrow\; x_1=0;\, x_2=4$

$$\int_0^4 ((5x-x^2)-x)\,dx=\int_0^4 (4x-x^2)\,dx=\left[2\cdot x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\left(32-\frac{64}{3}\right)-0=\frac{96-64}{3}=\frac{32}{3}=\frac{64}{6}$$

Subtrahiert man vom gesamten Flächeninhalt den Inhalt der grünlichen Teilfläche, so erhält man den Inhalt der rötlichen Teilfläche: $\frac{125}{6}-\frac{64}{6}=\frac{61}{6}$

Der grünliche Teil hat also einen etwas größeren Inhalt als der rötliche Teil.

---

5 Das bestimmte Integral und sein Wert sind gegeben: $\int_{-1}^{a} (2x-6x^2+2a^2)\,dx=0$

a) Berechnen Sie alle Lösungen für den Wert von a.

$$\int_{-1}^{a} (2x-6x^2+2a^2)\,dx=\left[x^2-2x^3+2a^2x\right]_{-1}^{a}=(a^2-2a^3+2a^3)-(1+2-2a^2)=3a^2-3=0 \;\rightarrow\; a_{1,2}=\pm 1$$

b) Eine der Lösungen können Sie auch ohne jegliche Rechnung angeben. Geben Sie diesen Wert an und den Grund dafür, dass diese Lösung so einfach (hoffentlich!) zu finden ist.

$a=-1$ *hätte man raten können, denn wenn die untere und obere Grenze des Integrals übereinstimmen, ist der Wert des bestimmten Integrals gleich 0, wie auch hier gefordert ist.*

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!